Lösungen zur Aufgabe 11 auf dem 4. Übungsblatt.

Teil b) Zunächst berechnen wir $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz}$ mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$ und $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}$. Dazu stellen wir fest, dass f in $z_0 = -1$ einen Pol der Ordnung 4 hat. Außerdem verläuft γ einmal gegen den Uhrzeigersinn um $z_0 = -1$. Daraus erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname{res}(f, -1).$$

Wir müssen also noch das Residuum berechnen. Es gilt

$$\operatorname{res}(f, -1) = \tfrac{1}{3!}\Big[\frac{d^3}{dz^3}(z+1)^4 f(z)\Big]_{z=-1} = \tfrac{1}{3!}\big[8e^{2z}\big]_{z=-1} = \tfrac{8}{6}e^{-2}$$

und somit insgesamt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = \tfrac{8}{3}\pi i e^{-2}.$$

Teil c) Nun berechnen wir $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz}$ mit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 4e^{it}$ und $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}$. Dazu stellen wir fest, dass f in $z_0 = \pi$ einen Pol der Ordnung 3 hat. Außerdem verläuft γ einmal gegen den Uhrzeigersinn um $z_0 = \pi$. Daraus erhalten wir

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz}\, f(z)\,\mathrm{dz} = 2\pi i \operatorname{res}(f, \pi).$$

Wir müssen also noch das Residuum berechnen. Es gilt

$$\operatorname{res}(f, \pi) = \tfrac{1}{2!}\Big[\frac{d^2}{dz^2}(z-\pi)^3 f(z)\Big]_{z=\pi} = \tfrac{1}{2!}\big[2ie^{iz} - ze^{iz}\big]_{z=\pi} = ie^{i\pi} - \tfrac{\pi}{2}e^{i\pi} = -i + \tfrac{\pi}{2}$$

und somit insgesamt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz} = 2\pi + i\pi.$$