Karlsruher Institut für Technologie

24. April 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

a) Sei $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$. Bestimme den Real- und Imaginärteil von z^n für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = |z|$? Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 = |z|^2$?

c) Skizziere die Mengen

(i) $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$,

(ii) $D_1 = \{-z : z \in D_0\}$,

(iii) $D_2 = \{\mathrm{i}z : z \in D_0\}$,

(iv) $D_3 = \{z^2 : z \in D_0\}$,

(v) $D_4 = \{z^{-1} : z \in D_0\}$,

(vi) $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 - \mathrm{i}| < 1 \text{ und } |z - 2 + \mathrm{i}| \leq 2\}$,

(vii) $C_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : |z + \mathrm{i}| + |z - \mathrm{i}| = \frac{10}{3}\right\}$.

d) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

(i) Ist f beschränkt? (*Zusatz*: Ist f stetig in 0?)

(ii) Ersetze $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$: Was ist die größtmögliche Definitionsmenge in $\mathbb{C}^2$ für die Funktion $(z,w) \mapsto \frac{zw}{z^2+w^2}$? Ist diese Funktion beschränkt?

e) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten das Exponentialgesetz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ sowie die Additionsformeln $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ und $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$. Erkläre den Zusammenhang.

Aufgabe 2 (Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie)

Betrachte die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar? Bestimme für diese Punkte die Ableitung. Gibt es eine Menge, auf der f holomorph ist?

a) $f(z) = z^3 - 2\mathrm{i}z^2 + \mathrm{i}z - 1$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) $f(x + \mathrm{i}y) = \sin(x)\sin(y) - \mathrm{i}\cos(x)\cos(y)$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

c) $f(z) = z \operatorname{Re} z$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

d) $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z|}$, für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (Holomorphie und harmonische Funktionen)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Definiere $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Wir setzen voraus, dass die Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbar sind. Zeige, dass u *harmonisch* ist, d.h., es gilt $\Delta u(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$u_\lambda(x,y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2 \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es eine holomorphe Funktion f mit $u_\lambda = \operatorname{Re} f$? Bestimme in diesem Fall eine derartige Funktion f. Bestimme alle.