Karlsruher Institut für Technologie

8. Mai 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt
3. Übungsblatt

Aufgabe 1
Berechne jeweils für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und den Weg γ die folgenden Kurvenintegrale $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z$.

a) $f(z) = \bar{z}^3$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$,

b) $f(z) = \bar{z}$, $\gamma(t) = t + \mathrm{i}t^2$, $t \in [0, 1]$,

c) $f(z) = \bar{z}z^2$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)}, t \in [0, \pi/2]$,

d) $f(z) = \bar{z}z^2$, γ Verbindungsstrecke von -1 nach i,

e) $f(z) = |z|^2$, γ durchlaufe einmal im Gegenuhrzeigersinn den Rand der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0, 1)\}$.

f) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(0) = 1$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$.
Hinweis: Sinusreihe und Satz 1.19.

Aufgabe 2

a) Sei p eine Polynom, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$. Zeige

$$\int_\gamma \overline{p(z)} \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\overline{p'(0)}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen einen Beweis für die Formel

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}$$

nachvollziehen. Betrachte dazu $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{\mathrm{i}z} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$ sowie den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$; $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

(i) Zeige
$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n} \,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z.$$

(ii) Wende die binomische Formel auf f an und berechne damit das Integral $\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z$ mit Hilfe von Beispiel 1.18a).