Karlsruher Institut für Technologie

15. Mai 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt
4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Cauchys Integralsatz und -formel)
Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $r \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechne die folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$
Unterscheide, ob $|a| < r$ oder $|a| > r$.

b) $\displaystyle\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z,$
wobei $|a| < r$ und $|b| > r$ gelte.

c) $\displaystyle\int_{\partial B(0,1)} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+3z}\,\mathrm{d}z.$

d) $\displaystyle\int_{\partial B(-3,3)} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$

e) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{z^3}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$

f) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z.$

g) $\displaystyle\int_{\partial B(0,2)} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\,\mathrm{d}z.$

h) $\displaystyle\int_{\partial B(1,1)} \frac{z^n}{(z-1)^n}\,\mathrm{d}z.$

Aufgabe 2 (Potenzreihenentwicklung am Beispiel der geometrischen Reihe)
Betrachte $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

a) Entwickle f in eine Potenzreihe um 0 und bestimme den Konvergenzradius.

b) Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Entwickle f in eine Potenzreihe um w und bestimme den Konvergenzradius.

c) Entwickle die Funktion $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ um jeden Punkt in $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

Aufgabe 3 (Folgerungen aus dem Satz von Liouville)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht konstant ist.
Zeige, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ ist.

b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Zeige, dass f konstant ist.