Karlsruher Institut für Technologie

22. Mai 2019
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

Analysis für das Lehramt
5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Isolierte Singularitäten)
Bestimme jeweils Art und Lage aller isolierter Singularitäten der Funktion f. Wenn f in z_0 eine hebbare Singularität hat, dann bestimme $f(z_0)$ so, dass f analytisch in einer Umgebung von z_0 ist, wenn f einen Pol in z_0 hat, dann bestimme die Polordnung und berechne das Residuum $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - z - 12}$

b) $f(z) = \dfrac{\sin z - z}{z^3}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + b^2)^2}$ für $b > 0$

d) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 + b^2)^2}$ für $b > 0$

e) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/z}}{(z-1)^2}$

f) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z}$

g) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1 - \cos z}$

h) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$

Aufgabe 2 (Laurentreihen)

a) Bestimme die Laurentreihenentwicklung um 0 für die Funktionen $z \mapsto \dfrac{1}{z(1+z)}$ und $z \mapsto \dfrac{z-1}{z^2(z+1)}$.

b) Bestimme den Hauptteil $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$ der Laurentreihe um 0 von $z \mapsto \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{z^2}}$.

c) Man kann Laurentreihen nicht nur auf punktierten Mengen $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ betrachten sondern auch auf Kreisringen. Zum Beispiel erhält man für die geometrische Reihe die Entwicklung

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n,$$

die für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ (genau dann gilt nämlich $|z^{-1}| < 1$) konvergiert.

Seien $D = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$ gegeben. Bestimme eine Darstellung von f als Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 2$, die im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2| < 3\}$ konvergiert.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 wird nicht gemeinsam in der Übung besprochen sondern ist als Hausaufgabe zum Selbststudium gedacht. Dabei sollen auch wichtige Begriffe und Techniken aus Analysis 1[*] zum uneigentlichen Riemann-Integral wiederholt werden.

Aufgabe 3 (Fresnel-Integrale)
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Berechnung der *Fresnel-Integrale*

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$$

nachzuvollziehen.

a) Zeige, dass die uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ und $\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ konvergieren.
Wiederholung: Lies Definition 6.31 a) (und rekursiv alle Definitionen von Begriffen die in dieser Definition vorkommen). Konvergenz des uneigentlich Integrals bedeutet, dass man zeigen muss, dass der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ existiert. Um dies zu bewerkstelligen, muss man $\int_0^R \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ besser verstehen. Es bietet sich folgende Vorgehensweise an: Substituiere $s = t^2$, teile das entstehende Integral in die Teile $\int_0^1$ und $\int_1^{R^2}$ auf. Beachte, dass das erste Integral $\int_0^1$ nun auch ein uneigentliches Integral ist, und man die Existenz von $\lim_{r\to 0} \int_r^1$ untersuchen muss. Lies das zentrale Beispiel 6.33 b). Wende dieses Beispiel zusammen mit dem Majorantenkriterium in Satz 6.34 a) auf die vorliegenden Integrale an. Beim ersten Integral funktioniert dies direkt, beim zweiten Integral muss man zuvor noch partiell integrieren. Im Beispiel 6.35 b) kann man sich Hilfe für diese Vorgehensweise holen.

b) Sei $R > 0$. Sei γ_R ein geschlossener Weg, der aus dem Zusammenfügen der folgenden Teilwege besteht: $\gamma_{R,1}$ ist die Verbindungsstrecke von 0 nach R, $\gamma_{R,2}$ ist der Kreisbogen von R nach $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ und $\gamma_{R,3}$ ist die Verbindungsstrecke von $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ nach 0. Das von γ umschlossene Gebiet sieht wie ein Tortenstück aus. Gib möglichst einfache Parametrisierungen für die Teilwege $\gamma_{R,1}$, $\gamma_{R,2}$ und $\gamma_{R,3}$ an.

c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ gegeben. Berechne $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ mit Cauchys Integralsatz.

d) Gib eine Formel für $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ durch direktes Einsetzen der drei Teilwege an.

e) Im letzten Schritt folgert man die Behauptung durch die Betrachtung von $R \to \infty$. Dazu ist folgendes zu tun.

(i) Zeige, dass der Real- beziehungsweise Imaginärteil von $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,1}} f(z)\,\mathrm{d}z$ den gesuchten Fresnel-Integralen entspricht.

(ii) Zeige, dass man $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ erhält, wenn man das *Gaußsche Fehlerintegral* $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ als bekannt voraussetzt.

(iii) Es bleibt nur noch $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ zu zeigen. Zeige dazu die Abschätzung $\left|\int_{\gamma_{R,3}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^{\pi/4} R\mathrm{e}^{-R^2\sin(s)}\,\mathrm{d}s$, wobei Aufgabe 1 b), Blatt 2, die Substitutionsregel und die Symmetrien der Sinusfunktion eingehen. Schließe daraus die Behauptung mit der Abschätzung $\sin(s) \ge \frac{1}{2}s$ für $s \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

[*]Die in dieser Aufgabe genannten Referenzen auf Definitionen und Sätze beziehen sich auf das Analysis 1-Skriptum von Prof. Schnaubelt.