Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Andreas Geyer-Schulz

# Analysis für das Lehramt
## 9. Übungsblatt

**Aufgabe 1 (Vermischte Aufgaben zur mehrdimensionalen Integration)**
Berechne die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^2+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(1-x)^2}} \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{[0,\pi]\times[-\pi/2,2\pi]} (y\sin(x)+x\sin(y))\,\mathrm{d}(x,y)$

d) $\displaystyle\int_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\le x^2+y^2\le 2y\}$.

e) $\displaystyle\mathrm{vol}(D)^{-1}\int_D z\,\mathrm{d}(x,y,z)$, wobei $D$ die Halbkugel $B(0,R)\cap\{z\ge 0\}$ für ein $R>0$ ist. (Das Ergebnis ist die $z$-Koordinate des Schwerpunkts der homogenen Halbkugel.)

f) $\displaystyle\int_D \frac{1}{x+6}\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $D$ die Fläche zwischen der $y$-Achse und der Kurve $\gamma(t)=(t-t^3,2t-t^2)$ für $t\in[0,1]$ ist.

g) $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}(x,y)$

h) $\displaystyle\int_D xyz\,\mathrm{d}(x,y,z)$, wobei $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y\ge 0, x^2+y^2\le z\le 1\}$.

**Aufgabe 2 (Ein Gegenbeispiel)**
Man darf die Integrationsreihenfolge bei iterierten Integralen nicht immer vertauschen! Zeige durch direkte Berechnung, dass die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \quad\text{und}\quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

nicht übereinstimmen. Warum ist der Satz von Fubini nicht anwendbar?