Analysis für das Lehramt – Winter 2020

Aufgabe 1 (Funktionentheorie, 4+(3+3)+(3+2) Punkte)

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $\exp(z^2) = 1$ erfüllen.

b) Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\cos(z) - 1}\,\mathrm{d}z$ mit $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma |\mathrm{e}^z|\,\mathrm{d}z$ mit $\gamma(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^t$ für $t \in [0, 1]$.

c) Sei

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-1/z}}{(1 + z^2)^2}.$$

(i) Bestimmen Sie für jede isolierte Singularität von f, ob sie hebbar, ein Pol oder wesentlich ist.

(ii) Bestimmen Sie für jeden Pol z_0 von f die Polordnung von z_0.

Aufgabe 2 (Integral- und Volumenberechnung, 5+5+5 Punkte)

a) Sei $A = \big\{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \,\big|\, y \le x^2, y \le z\big\}$. Berechnen Sie $\mathrm{vol}(A)$.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{\pi} 2x \cos(x^2 + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

c) Sei $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\big\}$. Berechnen Sie

$$\int_D yz\,\mathrm{d}(x, y, z).$$

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen, 5+2+(7+1) Punkte)

a) Sei $u_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung und ihr maximales Existenzintervall in $[0, \infty)$.

$$u'(t) = \mathrm{e}^{-t-u(t)}, \quad u(0) = u_0.$$

b) Sei $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(t) = \sin(t)$. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, für die u eine Lösung des Anfangswertproblems $u'(t) = f(u(t))$, $u(0) = 0$ ist.

c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Für welche Werte von α gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{tA} u_0 = 0$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^2$?