Analysis für das Lehramt – Sommer 2019

Notenschlüssel: 45–41 **1,0**; 40–39 **1,3**; 38–37 **1,7**; 36–34 **2,0**; 33–32 **2,3**; 31–30 **2,7**; 29–27 **3,0**; 26–25 **3,3**; 24–23 **3,7**; 22–20 **4,0**; 19–0 **5,0**

Aufgabe 1 (Funktionentheorie, 3+6+6 Punkte)

a) Bestimme Real- und Imaginärteil von

(i) i^{-1}, (ii) $\sqrt{\mathrm{i}}$, (iii) $\log(\mathrm{i})$.

b) Betrachte $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Berechne die Wegintegrale

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{|z|^2}\,\mathrm{d}z$, (ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z$.

c) Betrachte $f : \mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z^2(z^2+1)}$. Bestimme die Polordnung von f an den Stellen i, $-$i und 0. Berechne

(i) $\mathrm{Res}(f, \mathrm{i})$, (ii) $\mathrm{Res}(f, 0)$.

Lösung.

a) (i) Es gilt $\mathrm{i}^{-1} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ und somit $\mathrm{Re}(\mathrm{i}^{-1}) = 0$ und $\mathrm{Im}(\mathrm{i}^{-1}) = -1$.

(ii) Es gilt $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ und somit $\sqrt{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})$. Daraus folgt $\mathrm{Re}(\sqrt{\mathrm{i}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\mathrm{Im}(\sqrt{\mathrm{i}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(iii) Es gilt $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ und somit $\log(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$. Daraus folgt $\mathrm{Re}(\log(\mathrm{i})) = 0$ und $\mathrm{Im}(\log(\mathrm{i})) = \frac{\pi}{2}$.

b) Der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt $\gamma'(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, \pi]$.

(i) Wir berechnen direkt mit der Definition des Wegintegrals

$$\int_\gamma \frac{1}{|z|^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|^2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\Big]_0^{2\pi} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^0 = 1 - 1 = 0.$$

(ii) Die Sinusfunktion ist ganz. Aus Cauchys Integralformel folgt daher

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sin'(0) = 2\pi\mathrm{i}\cos(0) = 2\pi\mathrm{i}.$$

c) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ gilt

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z^2(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}.$$

Betrachte den Zähler $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = \mathrm{e}^z - 1$. Da $h(\pm\mathrm{i}) \neq 0$ gilt, hat der Zähler in $\pm\mathrm{i}$ keine Nullstelle und somit hat f in $\pm\mathrm{i}$ jeweils einen Pol erster Ordnung. Ferner gilt $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1 \neq 0$, also hat h in 0 eine einfache Nullstelle. Somit hat f in 0 ebenfalls einen Pol erster Ordnung.

(i) Mit der Formel für Residuen von Polen aus der Vorlesung erhält man

$$\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) = \lim_{z \to \mathrm{i}} (z-\mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to \mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z^2(z+\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - 1}{\mathrm{i}^2(\mathrm{i}+\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - 1).$$

(ii) Mit der gleichen Formel wie im ersten Teil erhält man

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = 1,$$

wobei wir die Potenzreihenentwicklung $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ verwendet haben. □

Aufgabe 2 (Integral- und Volumenberechnung, 5+5+5 Punkte)

a) Sei $Q = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}] \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechne

$$\int_Q y \sin(x + y^2) \,\mathrm{d}(x, y).$$

b) Sei $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Vertausche die Integrationsreihenfolge

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{x^2} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

c) Betrachte $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y \geq 0, 2 - x - y \geq 0\}$. Berechne

$$\int_A (x + y) \,\mathrm{d}(x, y).$$

Lösung.

a) Die Menge Q ist quadrierbar, abgeschlossen und der Integrand ist stetig auf Q. Der Satz von Fubini liefert

$$\begin{aligned}
\int_Q y \sin(x + y^2) \,\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \sin(x + y^2) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \Big[-\tfrac{1}{2} \cos(x + y^2) \Big]_{y=0}^{\sqrt{\pi/2}} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2} \cos(x) - \tfrac{1}{2} \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) \,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2} \big[\sin(x) - \sin(x + \tfrac{\pi}{2}) \big]_0^{\pi/2} \\
&= \tfrac{1}{2} \Big(\sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0) - \sin(\pi) + \sin(\tfrac{\pi}{2}) \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \big(1 - 0 - 0 + 1 \big) = 1.
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2 &\iff -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ \sqrt{y} \leq |x| \\
&\iff 0 \leq y \leq 1,\ -1 \leq x \leq -\sqrt{y},\ \sqrt{y} \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) \,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x, y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}(x,y) \in A &\iff y \geq 0,\ x \geq y,\ 2-y \geq x \\ &\iff y \geq 0,\ x \geq y,\ 2-y \geq x, 2-y \geq y \\ &\iff 1 \geq y \geq 0,\ 2-y \geq x \geq y.\end{aligned}$$

Der Satz von Fubini liefert

$$\begin{aligned}\int_A (x+y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x+y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2 + yx \right]_{x=y}^{2-y} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(2-y)^2 + y(2-y) - \tfrac{1}{2}y^2 - y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 2 - 2y^2\,\mathrm{d}y \\ &= 2 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen, 6+9 Punkte)

a) Sei $u_0 \in (0,\infty)$. Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)^2$, $u(0) = u_0$ und ihr maximales Existenzintervall. Falls die Lösung für alle $t \in [0,\infty)$ existiert, bestimme $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$.

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne e^{tA} für $t \in [0,\infty)$.

(ii) Gib ein $u_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ an, welches $\mathrm{e}^{tA}u_0 \to 0$ für $t \to \infty$ erfüllt und gib ein $u_1 \in \mathbb{R}^3$ an, welches $|\mathrm{e}^{tA}u_1|_2 \to \infty$ für $t \to \infty$ erfüllt.

Lösung.

a) Trennung der Variablen zeigt, dass die Lösung des Anfangswertproblems die Gleichung

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{u_0}^{u(t)} = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s = \left[-\mathrm{e}^{-s}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-t}$$

erfüllt. Auflösen nach $u(t)$ liefert die Lösungsformel

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0(1-\mathrm{e}^{-t})}$$

und die Lösung existiert auf dem größten Intervall um 0 auf dem der Nenner keine Nullstellen hat. Es gilt

$$1 - u_0(1-\mathrm{e}^{-t}) = 0 \iff \mathrm{e}^{-t} = \frac{u_0 - 1}{u_0}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Falls $u_0 \leq 1$, so ist das maximale Existenzintervall der Lösung gleich $(-\infty,\infty)$ und es gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{u_0}{1-u_0}$ im Fall $u_0 < 1$ beziehungsweise $\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ im Fall $u_0 = 1$. Falls $u_0 > 1$, so lautet das maximale Existenzintervall $\big(-\infty, \log(\frac{u_0}{u_0-1})\big)$.

b) (i) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte von A. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det\begin{pmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ -3 & \lambda-3 & -1\\ 3 & 1 & \lambda-1\end{pmatrix}\\ &= (\lambda+1)((\lambda-3)(\lambda-1)+1)\\ &= (\lambda+1)(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A lauten also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Wir bestimmen nun die Eigenvektoren. Zum Eigenwert λ_1 muss man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -3 & -4 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

lösen. Man erhält durch Addition der zweiten und dritten Zeile die Gleichung $3y - 3z = 0$ und somit den Eigenvektor $v_1 = (1, -1, 1)^\intercal$. Für den doppelten Eigenwert λ_2 betrachten wie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ -3 & -1 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Hier erhalten wir $3x = 0$ und $y + z = 0$, also den Eigenvektor $v_2 = (0, -1, 1)^\intercal$. Der Eigenraum ist eindimensional, also müssen wir noch einen Hauptvektor bestimmen. Wir lösen dazu das Gleichungssystem $(A - 2I)w = v_2$, also

$$\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $x = 0$ und $y + z = -1$ und setzen somit $w = (0, 0, -1)^\intercal$. Damit können wir ein Fundamentalsystem

$$Y(t) = \left(\mathrm{e}^{-t}v_1, \mathrm{e}^{2t}v_2, \mathrm{e}^{2t}w + t\mathrm{e}^{2t}v_2\right) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ -\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{2t} & -t\mathrm{e}^{2t}\\ \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} + t\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

angeben. Mit

$$Y(0) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

erhalten wir schließlich

$$\mathrm{e}^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ -\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} + t\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t}\\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t} & -t\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} - t\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Am einfachsten kann man das asymptotische Verhalten von e^{tA} an Eigenvektoren ablesen. Es gilt $\mathrm{e}^{tA}v_1 = \mathrm{e}^{-t}v_1 \to 0$ für $t \to \infty$ und $|\mathrm{e}^{tA}v_2|_2 = |\mathrm{e}^{2t}v_2|_2 \to \infty$ für $t \to \infty$. $\square$