Analysis für das Lehramt – Winter 2020

Notenschlüssel: 45–41 **1,0**; 40–39 **1,3**; 38–37 **1,7**; 36–34 **2,0**; 33–32 **2,3**; 31–30 **2,7**; 29–27 **3,0**; 26–25 **3,3**; 24–23 **3,7**; 22–18 **4,0**; 17–0 **5,0**

Aufgabe 1 (Funktionentheorie, 4+(3+3)+(3+2) Punkte)

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $\exp(z^2) = 1$ erfüllen.

b) Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale.

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\cos(z)-1}\,\mathrm{d}z$ mit $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma |\mathrm{e}^z|\,\mathrm{d}z$ mit $\gamma(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^t$ für $t \in [0, 1]$.

c) Sei

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-1/z}}{(1+z^2)^2}.$$

(i) Bestimmen Sie für jede isolierte Singularität von f, ob sie hebbar, ein Pol oder wesentlich ist.

(ii) Bestimmen Sie für jeden Pol z_0 von f die Polordnung von z_0.

Lösung.

a) Wir betrachten $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}$ und ferner

$$\mathrm{e}^{z^2} = \mathrm{e}^{a^2-b^2+2ab\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2ab\mathrm{i}}\mathrm{e}^{a^2-b^2}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z^2} = 1 &\iff \mathrm{e}^{a^2-b^2} = 1 \text{ und } 2ab\mathrm{i} \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \\
&\iff a^2 = b^2 \text{ und } ab \in \pi\mathbb{Z} \\
&\iff |a| = |b| \text{ und } a^2 \in \pi\mathbb{Z} \\
&\iff (a,b) \in \left\{ \left((-1)^n\sqrt{k\pi}, (-1)^m\sqrt{k\pi}\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0,\ n, m \in \{0,1\} \right\} \\
&\iff z \in \left\{ \sqrt{k\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1+2n)/4} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0,\ n \in \{0,1,2,3\} \right\}.
\end{aligned}$$

b) (i) Die Abbildung $f\colon B(0, 3/2) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z}{\cos(z)-1}$ ist holomorph und hat eine isolierte Singularität in 0. Aus der Potenzreihenentwicklung des Kosinus ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{z}{\cos(z)-1} &= z\left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} - 1\right)^{-1} \\
&= z\left(\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right)^{-1} \\
&= \left(z\sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n+2)!}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Also hat f einen Pol erster Ordnung in 0 und es gilt

$$\operatorname{Res}(f,0) = \left.\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n+2)!}}\right|_{z=0} = -2.$$

Aus dem Residuensatz folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,0) = -4\pi\mathrm{i}.$$

(ii) Wir berechnen mit der Definition des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma |\mathrm{e}^z|\,\mathrm{d}z = \int_0^1 |\mathrm{e}^{\gamma(t)}|\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |\exp(\mathrm{i}\mathrm{e}^t)|\mathrm{i}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{i}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\,(\mathrm{e}-1)\,.$$

c) Für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$ gilt

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-1/z}}{(1+z^2)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-1/z}}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir

$$f(-\tfrac{1}{n}) = \frac{\mathrm{e}^n}{(1+n^{-2})^2} \to \infty \quad \text{und} \quad f(\tfrac{1}{n}) = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{(1+n^{-2})^2} \to 0$$

für $n \to \infty$. Folglich liegt in 0 eine wesentliche Singularität vor. Wir definieren $g_\pm\colon \mathbb{C}\setminus\{0,\pm\mathrm{i}\}$ durch $g_\pm(z) = \frac{\mathrm{e}^{1/z}}{(z\mp\mathrm{i})^2}$. Dann ist g holomorph und es gilt $g_\pm(\mp\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}}}{4} \neq 0$. Wegen $f(z) = \frac{g_\pm(z)}{(z\pm\mathrm{i})^2}$ folgt, dass f in $\pm\mathrm{i}$ jeweils einen Pol zweiter Ordnung besitzt. $\square$

Aufgabe 2 (Integral- und Volumenberechnung, 5+5+5 Punkte)

a) Sei $A = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid y \leq x^2, y \leq z\}$. Berechnen Sie $\mathrm{vol}(A)$.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{\pi} 2x\cos(x^2+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

c) Sei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie

$$\int_D yz\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Lösung.

a) Es gilt

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2 \leq 1,\ y \leq z \leq 1\right\}.$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(A) &= \int_A 1\,\mathrm{d}(x,y,z)\\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_y^1 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 1-y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x^2 - \frac{1}{2}x^4\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}.\end{aligned}$$

b) Wir berechnen die iterierten Integrale

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{\pi} 2x\cos(x^2+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \Big[2x\sin(x^2+y)\Big]_{y=x^2}^{\pi}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(2x^2) - 2x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos(2x^2) + \cos(x^2)\right]_{x=0}^{\sqrt{\pi}}\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 1 = -2.\end{aligned}$$

c) Wir setzen

$$A = \left\{(r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,1], \varphi \in [0,\tfrac{\pi}{2}], \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}]\right\}.$$

In Kugelkoordinaten gilt $D = \Phi_3(A)$, wobei

$$\Phi_3(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta)\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left|\det \Phi_3'(r,\varphi,\theta)\right| = r^2\cos(\theta)$$

gilt. Mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini berechnen wir daher

$$\begin{aligned}
\int_D yz \,\mathrm{d}(x, yz) &= \int_A r \sin(\varphi) \cos(\theta) r \sin(\theta) r^2 \cos(\theta) \,\mathrm{d}(r, \varphi, \theta) \\
&= \left(\int_0^1 r^4 \,\mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \,\mathrm{d}\theta \right) \\
&= \frac{1}{5} \left[-\cos(\varphi) \right]_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} \cos(\theta)^3 \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen, 5+2+(7+1) Punkte)

a) Sei $u_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung und ihr maximales Existenzintervall in $[0, \infty)$.

$$u'(t) = \mathrm{e}^{-t-u(t)}, \quad u(0) = u_0.$$

b) Sei $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(t) = \sin(t)$. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, für die u eine Lösung des Anfangswertproblems $u'(t) = f(u(t))$, $u(0) = 0$ ist.

c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Für welche Werte von α gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{tA} u_0 = 0$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^2$?

Lösung.

a) Wegen $\mathrm{e}^{-t-u(t)} = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-u(t)}$ können wir die Methode der Trennung der Variablen anwenden. Wir erhalten

$$\mathrm{e}^{u(t)} - \mathrm{e}^{u_0} = \int_{u_0}^{u(t)} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{e}^{-s} \,\mathrm{d}s = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

Auflösen nach $u(t)$ liefert

$$u(t) = \log(1 - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{u_0})$$

für alle $t \in (-\log(1 + \mathrm{e}^{u_0}), \infty)$. Das maximale Existenzintervall in $[0, \infty)$ lautet also $[0, \infty)$.

b) Angenommen u wäre eine Lösung der autonomen Differentialgleichung $u'(t) = f(u(t))$. Dann gilt $1 = u'(0) = f(u(0)) = f(0) = f(u(\pi)) = u'(\pi) = -1$, ein Widerspruch. Also exisitiert keine derartige Differentialgleichung.

c) (i) Wegen

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 0 & \lambda - \alpha \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - \alpha),$$

hat A die Eigenwerte -1 und α. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Es gelte $\alpha \neq -1$. In diesem Fall hat A zwei verschiedene einfache Eigenwerte. Wir sehen, dass $v = (1, 0)^\intercal$ ein Eigenvektor zu -1 und $w = (1, 1 + \alpha)^\intercal$ ein Eigenvektor zu α ist. Daraus erhalten wir die Fundamentallösung

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{\alpha t} \\ 0 & (1 + \alpha)\mathrm{e}^{\alpha t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mit

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y(0)^{-1} = \frac{1}{1 + \alpha} \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= Y(t)Y(0)^{-1} \\
&= \frac{1}{1+\alpha}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{\alpha t} \\ 0 & (1+\alpha)e^{\alpha t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{1+\alpha}(-e^{-t}+e^{\alpha t}) \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Es gelte $\alpha = -1$. In diesem Fall ist -1 ein doppelter Eigenwert, seine geometrische Vielfachheit ist jedoch 1, da $v = (1,0)^\intercal$ den Eigenraum aufspannt. Wir bestimmen in diesem Fall einen Hauptvektor w als Lösung der Gleichung $(A+I)w = v$, d.h.

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

also $w = (0,1)^\intercal$. Die Fundamentallösung ist somit durch

$$
Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},
$$

gegeben. Da $Y(0) = I$ gilt, haben wir bereits $e^{tA} = Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ gefunden.

(ii) Aus den Formeln für e^{tA} in Teil (i) lesen wir ab, dass $\lim_{t\to\infty} e^{tA}u_0 = 0$ für alle $u_0 \in \mathbb{R}^2$ genau dann gilt, wenn $\alpha < 0$ ist. □