Hinweise zur Klausur Analysis für das Lehramt

Andreas Geyer-Schulz

Sinn und Zweck der Klausur

Die Ziele der Lehrveranstaltung sind im Modulhandbuch festgelegt. Dort heißt es:

> Die Studierenden werden am Ende des Moduls
>
> - Volumina von Körpern und mehrdimensionale Integrale berechnen können,
> - einfache Anwendungsprobleme als gewöhnliche Differentialgleichungen modellieren können, für Anfangswertprobleme Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen nachweisen können, Lösungsverfahren für gängige Typen von Differentialgleichungen beherrschen,
> - den grundsätzlichen Unterschied zwischen reeller und komplexer Funktionentheorie kennen, anhand von Reihendarstellungen und mit dem Satz von Cauchy die besonderen Eigenschaften holomorpher Funktionen begründen können, mit Hilfe des Residuensatzes besondere reelle Integrale auswerten können.

Vorlesung und Übung sollen dazu dienen, die Grundlage zum Erwerb dieser Fähigkeiten zu schaffen. Mit der Klausur am Ende des Semesters wird dann dokumentiert, dass diese Fähigkeiten auch tatsächlich beherrscht werden. Für eine bestandene Klausur werden 7 Leistungspunkte vergeben. Der notwendige Arbeitsaufwand sollte daher etwa 210 Stunden betragen. Etwa 70 Stunden entfallen dabei auf die Vorlesungs- und Übungszeit, die restlichen 140 Stunden sind zum selbstständigen Üben vorgesehen.

Inhalt der Klausur

Wenn man die Übungsaufgaben zu einem gewissen Themengebiet sicher beherrscht und dabei versteht, was man eigentlich rechnet, so sollte auch eine Klausuraufgabe zu dem gleichen Thema kein Problem sein. In vielen Übungsaufgaben steht die Anwendung eines Ergebnisses der Vorlesung zur konkreten Berechnung einer bestimmten Sache im Mittelpunkt. Dies wird auch in der Klausur so sein. Der „Algorithmus“ zur Lösung einer Klausuraufgabe lautet also:

1. Erkennen, was man eigentlich ausrechnen soll. (Zum Beispiel: ein Kurvenintegral.)
2. Abrufen eines passenden Ergebnis aus der Vorlesung (Zum Beispiel: Cauchy's Integralformel. Welche Voraussetzungen gibt es dafür, warum kann man sie hier anwenden?)
3. Richtiges und schnelles Durchführen der Rechnung. (Richtigkeit ist sehr wichtig: Die Faktoren $2\pi i$ und $n!$ sollen an der richtigen Stelle sein, die zweite Ableitung vom Sinus soll das richtige Vorzeichen haben, etc.)
4. Unsinn ist unbedingt zu vermeiden. (Zum Beispiel: Eine Ungleichung zwischen komplexen Zahlen wirkt sich immer negativ auf die Bewertung aus.)

Die Aufgaben orientieren sich an den folgenden Themengebieten.

Funktionentheorie

- sicheres und richtiges Rechnen mit komplexen Zahlen
- Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, Holomorphie (Blatt 1, Aufgabe 2,3)
- Exponentialfunktion, Logarithmus (Die Exponentialfunktion taucht ohnehin praktisch überall auf; Blatt 2, Aufgabe 3)
- Berechnung von Kurvenintegralen: Definition, Cauchys Integralsatz und -formel (Blatt 3 & 4, Aufgabe 1)
- Klassifikation isolierter Singularitäten, Berechnung von Residuen (Blatt 5, Aufgabe 1,2, Blatt 6, Aufgabe 1)
- Berechnung von reellen Integralen (Blatt 6, Aufgabe 2,3)

Integralrechung

- Satz von Fubini: Volumen und Integralberechnung, Vertauschen der Integrationsreihenfolge (Blatt 7, Aufgabe 2,3, Blatt 10, Aufgabe 1a)
- Polar-, Kugel- und Zylinderkoordinaten (Blatt 8, alle „vermischten“ Aufgaben auf Blatt 9 & 10)

Differentialgleichungen

- Trennung der Variablen, Bestimmung des maximalen Existenzintervalls (Blatt 11, Aufgabe 1,2)
- Lineare Differentialgleichungen: Matrixexponentialfunktion und Formel von Duhamel (Blatt 12, Aufgabe 1,2, Blatt 13, Aufgabe 2,3)

Klausurvorbereitung

- Die Klausur dauert zwei Stunden. Es schadet daher nicht, wenn man regelmäßig zwei Stunden lang hochkonzentriert und frei von jeder Ablenkung durch Smartphones und Mitmenschen ein bestimmtes Thema lernt. Pausen und Bewegung dürfen beim Lernen natürlich nicht fehlen.

- Erfahrungsgemäß erzielt man eher schlechte Ergebnisse, wenn man zu jedem Aufgabentyp ein bisschen etwas lernt, aber keinen davon richtig gut beherrscht. Um „richtig gut" bei einer bestimmten Aufgabe zu werden, braucht man kritische Selbsteinschätzung und ausreichend viel Übungszeit. Sobald man an den Punkt gelangt ist, einen Aufgabentyp „im Prinzip" verstanden zu haben, sollte man noch einige Zeit darauf investieren, auch wirklich schnell bei der Lösung zu werden.
- Auswendiglernen hat einen wichtigen Platz bei der Aneignung der Theorie: Die Formel für Integralberechnung mit Kugelkoordinaten muss „im Schlaf" abrufbar sein. Man sollte sich hier selbst testen: Aufschreiben der Formel aus dem Gedächtnis auf ein leeres Blatt Papier, anschließend strenge Überprüfung, ob man jedes Detail richtig geschrieben hat.
- Auswendiglernen der Lösung von Übungsaufgaben ist vermutlich nicht sehr zielführend. Irgendwas ist in der Klausur immer anders. Um sich darauf vorzubereiten, hilft es, wenn man möglichst viele Varianten einer Aufgabe gesehen hat. Solche Varianten kann man sich auch selbst ausdenken. Beispielsweise gab es eine Übungsaufgabe, bei der man die isolierten Singularitäten von $\frac{\sin(z)-z}{z^3}$ untersuchen sollte. Wenn man diese Aufgabe gelöst hat, ist es sehr sinnvoll, wenn man sich auch überlegt wie ähnliche Aufgaben aussehen könnten. Zum Beispiel könnte der Zähler auch $\cos(z) - z$ lauten. Dann stellt man fest, dass die Aufgabe dadurch leichter wird. Eher vom gleichen Typ wäre der Zähler $\cos(z) - 1$. Man sollte sich auch überlegen, ob man $\frac{\sin(z)-z^2}{z^3}$ oder $\frac{\sin(z)-z}{z^4}$ lösen könnte.
- Man kann auch in Lehrbüchern und im Internet nach weiteren Aufgaben suchen. Die Schwierigkeit besteht darin zu erkennen, ob eine gewisse Aufgabe inhaltlich und vom Schwierigkeitsgrad zur Klausurvorbereitung geeignet ist. Es ist Teil des Lernprozesses, dafür eine Einschätzung zu bekommen. Manche Aufgabentypen können auch gut von Computern gelöst werden. Dies bietet Vorteile bei der Kontrolle eigener Rechnungen.