ERGÄNZUNG ZUR ÜBUNG VOM 02.05.2013

Zusammenfassung. In Ergänzung zur Übung vom 02.05.2013 wollen wir hier einige wichtige und häufig genutzte Grundtatsachen über die Abstandsfunktion festhalten.

Im Folgenden sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und A und B nichtleere Teilmengen von V. Für $v \in V$ definieren wir

$$\operatorname{dist}(v, A) := \inf\{\|v - a\|;\ a \in A\}$$

sowie

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\|a - b\|;\ a \in A,\ b \in B\}.$$

1. **Lemma.** *Es seien A und B wie vor. Dann gelten die nachstehenden Aussagen.*

(a) Die Abbildung

$$\operatorname{dist}(\cdot, A) : V \to [0, \infty);\ v \mapsto \operatorname{dist}(v, A)$$

ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1.

(b) Ist $v \in V$, so gilt $\operatorname{dist}(v, A) = 0$ *dann und nur dann, wenn $v \in \overline{A}$ erfüllt ist.*

(c) Ist $v \in V$ und A kompakt, so existiert ein $a_0 \in A$ mit $\|v - a_0\| = \operatorname{dist}(v, A)$.

(d) Ist V endlichdimensional, so gilt die Aussage aus c) bereits, wenn A lediglich als abgeschlossen angenommen wird.

(e) Sind A und B abgeschlossen und disjunkt und ist wenigstens eine der beiden Mengen kompakt, so gilt $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

(f) Für alle $v \in V$ gilt $\operatorname{dist}(A, B) \le \operatorname{dist}(v, A) + \operatorname{dist}(v, B)$.

Beweis. zu (a): Es seien $v_1, v_2 \in V$ beliebig und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $a_1, a_2 \in A$ mit $\|v_j - a_j\| \le \operatorname{dist}(v_j, A) + \epsilon$ $(j \in \{1, 2\})$. O.B.d.A. dürfen wir $\operatorname{dist}(v_1, A) \ge \operatorname{dist}(v_2, A)$ annehmen (andernfalls ändern wir einfach die Nummerierung). Dann erhalten wir (wegen $\operatorname{dist}(v_1, A) \le \|v_1 - a\|$ für alle $a \in A$)

$$\begin{aligned}
|\operatorname{dist}(v_1, A) - \operatorname{dist}(v_2, A)| &= \operatorname{dist}(v_1, A) - \operatorname{dist}(v_2, A) \le \|v_1 - a_2\| - (\|v_2 - a_2\| - \epsilon) \\
&\le \big|\|v_1 - a_2\| - \|v_2 - a_2\|\big| + \epsilon \\
&\le \|(v_1 - a_2) - (v_2 - a_2)\| + \epsilon \\
&= \|v_1 - v_2\| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichungskette folgt durch Grenzübergang $\epsilon \to 0^+$ die Abschätzung

$$|\operatorname{dist}(v_1, A) - \operatorname{dist}(v_2, A)| \le \|v_1 - v_2\|$$

und damit die Behauptung.

zu (b): Die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(v, A) = 0 &\iff \inf\{\|v-a\|;\ a \in A\} = 0 \\
&\iff \exists\ (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} \|v - a_n\| = 0 \\
&\iff \exists\ (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} a_n = v \text{ in } (V, \|\cdot\|) \\
&\iff v \in \overline{A}
\end{aligned}$$

zeigen die Behauptung.

zu (c): Wir wählen eine Folge $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|v - a_n\| = \operatorname{dist}(v, A)$. Da A hier als kompakt vorausgesetzt ist, können wir zu einer in A konvergenten Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit Grenzwert a_0 übergehen. Es folgt dann $\operatorname{dist}(v, A) = \lim_{k\to\infty} \|v - a_{n_k}\| = \|v - a_0\|$ und somit die Behauptung.

zu (d): Sei nun V endlichdimensional, A abgeschlossen und sei $\rho := \operatorname{dist}(v, A) \geq 0$. Dann ist die Menge $\overline{U_{\rho+1}(v)} \cap A$ als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen und daher als Teilmenge der kompakten Menge $\overline{U_{\rho+1}(v)}$ selbst kompakt und zudem nach Wahl von ρ auch nichtleer. Folglich existiert nach Teil (c) ein $a_0 \in \overline{U_{\rho+1}(v)} \cap A$ mit $\|v - a_0\| = \operatorname{dist}(v, \overline{U_{\rho+1}(v)} \cap A)$. Für alle $a \in A \setminus \overline{U_{\rho+1}(v)}$ gilt nun offenkundig

$$\|v - a_0\| \leq \rho + 1 < \|v - a\|.$$

Mithin erhalten wir

$$\operatorname{dist}(v, A) \leq \|v - a_0\| \leq \min\left\{ \operatorname{dist}(v, \overline{U_{\rho+1}(v)} \cap A), \operatorname{dist}(v, A \setminus \overline{U_{\rho+1}(v)}) \right\} = \operatorname{dist}(v, A),$$

also $\|v - a_0\| = \operatorname{dist}(v, A)$.

zu (e): Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass A kompakt ist. Es gilt nun $\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{b\in B} \operatorname{dist}(b, A)$. Wir können daher eine Folge $(b_n)_n$ in B mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(b_n, A) = \operatorname{dist}(A, B)$ wählen. Nach Teil c) gibt es nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $\operatorname{dist}(b_n, A) = \|a_n - b_n\|$. Da A kompakt ist, können wir zu einer in A konvergenten Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit Grenzwert a_0 übergehen. Wäre nun $\operatorname{dist}(A, B) = 0$, so erhielten wir

$$0 \leq \|b_{n_k} - a_0\| \leq \|b_{n_k} - a_{n_k}\| + \|a_{n_k} - a_0\| = \operatorname{dist}(b_{n_k}, A) + \|a_{n_k} - a_0\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

was $a_0 \in \overline{B} = B$ nach sich zöge. Insbesondere würde dann $a_0 \in A \cap B$ gelten im Widerspruch zur Disjunktheit der Mengen A und B.

zu (f): Sei $v \in V$ beliebig. Für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt dann

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \operatorname{dist}(b, A) \leq \|a - b\| \leq \|a - v\| + \|v - b\|,$$

woraus durch Übergang zum Infimum bezüglicher aller $a \in A$ die Ungleichung

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \operatorname{dist}(v, A) + \|v - b\|$$

folgt, aus der sich wiederum durch Übergang zum Infimum bezüglicher aller $b \in B$ die Abschätzung

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \operatorname{dist}(v, A) + \operatorname{dist}(v, B)$$

ergibt. Damit ist alles gezeigt. □

1. **Bemerkung.** Die Aussage aus Teil e) des Lemmas ist im Allgemeinen ohne Kompaktheitsvoraussetzung falsch.

Beweis. Sei $(V, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Dann sind $A := \{(t, \mathrm{e}^{-t});\ t \in \mathbb{R}\}$ und $B := \{(t, 0);\ t \in \mathbb{R}\}$ nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Mengen mit $\operatorname{dist}(A, B) = 0$. $\square$

2. **Bemerkung.** Die Aussagen (a)-(c) und (e)-(f) des obigen Lemmas gelten in unveränderter Fassung auch für sog. *metrische Räume*. Die Beweise übertragen sich unmittelbar auf diese allgemeinere Situation.