2. Übungsblatt

A5 Seien $(J, x), (\tilde{J}, \tilde{x}), (\hat{J}, \hat{x}) \in \mathcal{L}$

Klar: $(J, x) \preceq (J, x)$ (Reflexivität)

Sei $(J, x) \preceq (\tilde{J}, \tilde{x})$ und $(\tilde{J}, \tilde{x}) \preceq (J, x)$

$\Rightarrow J \subseteq \tilde{J}$, $\tilde{x}|_J = x$ und $\tilde{J} \subseteq J$ und $x|_{\tilde{J}} = \tilde{x}$

$\Rightarrow J = \tilde{J}$ und $\tilde{x} = x$ (Antisymmetrie)

Es gelte $(J, x) \preceq (\tilde{J}, \tilde{x})$ und $(\tilde{J}, \tilde{x}) \preceq (\hat{J}, \hat{x})$

$\Rightarrow J \subseteq \tilde{J}$ und $\tilde{x}|_J = x$

und $\tilde{J} \subseteq \hat{J}$ und $\hat{x}|_{\tilde{J}} = \tilde{x}$

$\Rightarrow J \subseteq \hat{J}$ und $\underbrace{(\hat{x}|_{\tilde{J}})}_{= \tilde{x}}|_J = x$

$\Rightarrow J \subseteq \hat{J}$ und $\hat{x}|_J = x$ (Transitivität)

Es sei nun

$\mathcal{F} = \{(J_k, x_k)\}_{k \in K}$

(mit einer Indexmenge K) eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{L}$. Wir setzen $J := \bigcup_{k \in K} J_k$ sowie

$$x : J \longrightarrow \mathbb{R}^p, \; t \longmapsto x_k(t), \text{ falls } t \in J_k.$$

x ist wohldefiniert: Sind nämlich $k, \tilde{k} \in K$ mit $t \in J_k$ und $t \in J_{\tilde{k}}$, so gilt, da $\mathcal{F}$ total geordnet ist, $(J_k, x_k) \preceq (J_{\tilde{k}}, x_{\tilde{k}})$

oder $(J_{\hat{k}}, x_{\hat{k}}) \leq (J_k, x_k)$. In jedem Falle gilt jedoch $x_k(t) = x_{\hat{k}}(t)$. Wegen $J_a \subseteq J_k$ $\forall k \in \mathcal{K}$ gilt damit insbesondere

$x(t) = x_k(t) = x_a(t)$ für alle $t \in J_a$ und alle $k \in \mathcal{K}$, d. h., $x|_{J_a} = x$.

J ist ein Intervall. Zum Nachweis dieser Aussage genügt es, zu zeigen, dass mit $a, b \in J$ auch $[a,b] \subseteq J$ gilt, falls $a < b$. Seien also $a, b \in J$ mit $a < b$. Seien weiter $k, \hat{k} \in \mathcal{K}$ mit $a \in J_k$ und $b \in J_{\hat{k}}$. Da $\mathcal{F}$ total geordnet ist, gilt $a, b \in J_k$ oder $a, b \in J_{\hat{k}}$ und daher auch $[a,b] \subseteq J_k$ oder $[a,b] \subseteq J_{\hat{k}}$ und somit in jedem Falle $[a,b] \subseteq J$.

x ist stetig diff'bar und erfüllt (1):

Sei $t \in J$. Ist $t \in J^\circ$, so existiert ein $k \in \mathcal{K}$ mit $t \in J_k^\circ$. In der Tat:

<u>A</u>: $\forall k \in \mathcal{K}\ \forall \varepsilon > 0 : (t-\varepsilon, t) \subseteq \mathbb{R} \setminus J_k$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : (t-\varepsilon, t) \subseteq \bigcap_{k \in \mathcal{K}} (\mathbb{R} \setminus J_k) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathcal{K}} J_k = \mathbb{R} \setminus J$

im Widerspruch zu $t \in \mathring{J}_k$

Also: $\exists k_0 \in \mathcal{K}\ \exists \varepsilon_0 > 0 : (t - \varepsilon_0, t] \subseteq J_{k_0}$. Wegen der totalen

Es gilt dann

für alle $(J_k, x_k) \geq (J_{k_0}, x_{k_0})$ die Inklusion

$(t-\varepsilon_0, t] \subseteq J_k$.

Analog zeigt man:

$\exists k_1 \in \mathcal{K}\ \exists \varepsilon_1 > 0 : [t, t+\varepsilon_1) \subseteq J_{k_1}$.

Wiederum mit Hilfe der totalen Anordnung von $\mathcal{F}$ erhält man, dass für alle

$$(J_k, x_k) \succsim \max_{\precsim}((J_{k_0}, x_{k_0}), (J_{k_1}, x_{k_1}))$$ (existiert in $\mathcal{F}$ wegen der total. Anordnung)

schon $(t-\varepsilon_0, t+\varepsilon_0) \subseteq J_k$, also $t \in J_k^\circ$, gilt.

Insbesondere ist $x|_{J_k} = x_k$ stetig diff'bar in t und es gilt

$$x'(t) = x_k'(t) = f(t, x_k(t)) = f(t, x(t)).$$

Ist t ein Randpunkt von J, so gilt entsprechend

$\forall \varepsilon > 0: \ (t-\varepsilon, t) \subseteq \mathbb{R} \setminus J$ ($\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall k \in K: (t-\varepsilon, t) \subseteq \mathbb{R} \setminus J_k$)

oder

$\forall \varepsilon > 0: \ (t, t+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus J$ ($\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall k \in K: (t, t+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus J_k$)

Im ersten Fall ist t für jedes J_k mit $t \in J_k$ ein linker und im zweiten Falle ein rechter Randpunkt. Die Differenzierbarkeitsaussage ist dann klar.

Schließlich ist $x(t_0) = x_0$ klar wegen $x|_{J_a} = x_a$.

Damit haben wir insgesamt $(J, x) \in \mathcal{L}$ gezeigt und somit auch, dass jede total geordnete Menge in $\mathcal{L}$ eine obere Schranke besitzt.

Nach dem Lemma von Zorn existiert folglich wenigstens ein bzgl. $\precsim$ maximales Element $(J_{max}, x_{max}) \in \mathcal{L}$.

<u>Beh</u>: x_{max} ist eine nicht fortsetzbare Lsg. von (1)

<u>Beweis</u>: <u>A</u>: x_{max} ist fortsetzbar

$\Rightarrow \exists$ Lsg $\tilde{x}: I \to \mathbb{R}^p$ (I Intervall) von (1): $J_{max} \subsetneq I$ und $\tilde{x}|_J = x_{max}$

Dann ist $\mathcal{L} \ni (I, \tilde{x}) \succsim (J_{max}, x_{max})$, was $(I, \tilde{x}) = (J_{max}, x_{max})$ und somit $I = J_{max}$ impliziert.

Widerspruch $\square$

A-II b)

Sei x <u>die</u> maximale Lösung des AWP

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x^2(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

(beachte: rechte Seite ist C^1). Sei $b \in (0, \min(1, \omega_+))$.

Dann gilt

$$\begin{cases} x'|_{[0,b]}(t) = t^2 + x^2(t) < 1 + x^2(t), & 0 \le t \le b \\ x(0) = 0 < \tan(\varepsilon) & (\varepsilon > 0 \text{ klein}) \end{cases}$$

Die Fkt $y : (-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \tan(t + \varepsilon)$ ist die maximale Lsg von

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = \tan(\varepsilon) \end{cases}$$

(**beachte:** $\tan' = 1 + \tan^2$)

Also folgt für alle $t \in (0, \min(1, \omega_+))$ mit Teil a):

$x(t) < \tan(t + \varepsilon)$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt ist, dass $[0, \min(1, \omega_+)) \subseteq (-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon)$ erfüllt ist.

Ferner gilt für alle $t \in [0, \min(1, \omega_+))$:

$x'(t) \geq t^2 \underset{\text{Integration}}{\Longrightarrow} x(t) \geq \frac{1}{3} t^3 + x(0) = \frac{1}{3} t^3$ für alle $t \in [0, \min(1, \omega_+))$. Insbesondere gilt $x(t) \geq 0$.

Daher würde $\overline{\lim\limits_{t \uparrow \omega_+}} |x(t)| = \overline{\lim\limits_{t \uparrow \omega_+}} x(t) \leq \overline{\lim\limits_{t \uparrow \omega_+}} \tan(t + \varepsilon) < \infty$

im Falle $\omega_+ \leq 1$ folgen. Da dies **nicht möglich** ist, erhalten wir $\omega_+ > 1$.

Genauer gilt nun: $\frac{d}{dt}(x(t) - \frac{1}{3} t^3) = x^2(t) \geq 0$. Die Funktion

$[0, 1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t) - \frac{1}{3} t^3$ ist also monoton wachsend.

<u>A</u>: $\exists\, t_0 \in (0, 1]$: $x(t_0) - \frac{1}{3} t_0^3 = 0$

$\underset{x(0)=0=\frac{1}{3}0^3}{\Longrightarrow} \forall\, t \in [0, t_0]$: $x(t) - \frac{1}{3} t^3 = 0$

$\Rightarrow \forall\, t \in [0, t_0]$: $t^2 + x^2(t) = x'(t) = t^2$

$\Rightarrow \forall\, t \in (0, t_0]$: $0 \neq \frac{1}{3} t^3 = x(t) = 0$ ↯

Also: $\forall t \in (0,1]$: $x(t) > \frac{1}{3} t^3$

$\Rightarrow$ $x(1) > \frac{1}{3}$. Für alle $t \in (1, \omega_+)$ gilt

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x^2(t) > 1 + x^2(t) \\ x(1) > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Durch

$z : [1, \frac{\pi}{2} + 1 - \arctan(\frac{1}{3})) \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \tan(t + \arctan(\frac{1}{3}) - 1)$

ist eine nach rechts nicht fortsetzbare Lsg von

$$\begin{cases} z' = 1 + z^2 \\ z(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

gegeben. Teil a) impliziert nun

$\forall t \in (1, \min(\omega_+, \frac{\pi}{2} + 1 - \arctan(\frac{1}{3}))) : x(t) > z(t) \geq 0$

Wäre $\omega_+ > 1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{3})$, so würde

$$\infty = \lim_{t \to 1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{3})} z(t) \leq \lim_{t \to 1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{3})} x(t) < \infty$$

folgen. Insgesamt erhalten wir also

$$1 < \omega_+ \leq 1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(\tfrac{1}{3}).$$

$\square$

A 81

Wir setzen zunächst voraus, dass

$$\forall t > 0 \; \forall x \in \partial \mathcal{U}_R(0) : \; (f(t,x) \,|\, x) < 0$$

und $\|x_0\|_2 < R$ gilt. Aus Stetigkeitsgründen existiert dann zu jedem Paar $(t,x) \in \mathbb{R}_{>0} \times \partial\mathcal{U}_R(0)$ ein $\delta > 0$ und ein $r > 0$ mit

$$\forall (s,y) \in (\overline{\mathcal{U}_\delta(t) \cap \mathbb{R}_{>0}}) \times \overline{\mathcal{U}_r(x)} : \; (f(s,y) \,|\, y) < 0$$

Sei nun $x : [0, \omega_+) \to \mathbb{R}^d$ die Lsg des AWP's

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$ (die nach Picard-Lindelöf existiert.)

Wir definieren $A := \{ \tau \in [t_0, \omega_+) \mid \forall t \in [t_0, \tau] : \|x(t)\|_2 \leq R \}$

Wegen $\|x(t_0)\|_2 = \|x_0\|_2 < R$ ist $A \neq \emptyset$. Folglich existiert $t_+ := \sup A$ in $\mathbb{R}$. Wegen $\|x(t_0)\|_2 < R$ folgt aus der Stetigkeit von x, dass $t_+ > t_0$ gilt.

IA: $\omega_+ < \infty$

Dann gilt $t_+ < \omega_+$. In der Tat: Wäre $t_+ = \omega_+$, so erhielten wir

$$\lim_{t \uparrow t_+} \|x(t)\|_2 = \infty \qquad (1)$$

oder

$$\underline{\lim}_{t \uparrow t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \{0\} \times \mathbb{R}^d) = 0 \qquad (2)$$

Wegen $\lim_{t \uparrow t_+} \underbrace{\|x(t)\|_2}_{\leq R} \leq R$ ist (1) nicht möglich

und wegen

$\underline{\lim}_{t \uparrow t_+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \{0\} \times \mathbb{R}^d) \geq \lim_{t \uparrow t_+} |t| = t_+ > 0$ ist

auch (2) nicht möglich. Also muss $t_+ < \omega_+$ gelten

Da x stetig ist, gilt $\|x(t_+)\|_2 \leq R$, d.h., $t_+ = \max A$.

Aus Stetigkeitsgründen sowie wegen $t_+ < \omega_+$ und wegen der Maximalität von t_+ kann hier <u>nicht</u> $\|x(t_+)\|_2 < R$ gelten!

$\Rightarrow$ $\|x(t_+)\|_2 = R$. Es seien nun δ und r wie am Anfang für das Paar $(t_+, x(t_+))$ gewählt. Wiederum aus Stetigkeitsgründen und wegen $t_+ < \omega_+$ existiert ein $\rho > 0$ derart, dass für alle $t \in [t_+, t_+ + \rho] \subseteq (0, \omega_+)$ die Relation $(t, x(t)) \in (U_\delta(t_+) \cap \mathbb{R}_{>0}) \times U_r(x(t_+))$ gilt. Für alle $t \in [t_+, t_+ + \rho]$ gilt dann

$$\frac{d}{ds}\left(\|x(s)\|_2^2\right)\Big|_{s=t} = 2\,\big(f(t, x(t)) \,\big|\, x(t)\big) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_{t_+}^{t} \frac{d}{ds}\|x(s)\|_2^2 \, ds}_{= \|x(t)\|_2^2 - \|x(t_+)\|_2^2} \leq 0 \qquad \forall t \in [t_+, t_+ + \rho]$$

$$\Rightarrow \quad \|x(t)\|_2^2 \leq \|x(t_+)\|_2^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \quad \forall t \in [t_+, t_+ + \rho] : \|x(t)\|_2 \leq R$$

im Widerspruch zur Maximalität von t_+!

Also war unsere Annahme falsch und es folgt $\omega_+ = \infty$. Exakt genauso führt man nun auch die Annahme $t_+ < \infty$ zu einem Widerspruch. Also existiert x global nach rechts und ist auf $[t_0, \infty)$ durch R beschränkt.

Wir wenden uns nun dem allg. Fall zu und betrachten für $m \in \mathbb{N}$ die AWP'e

$$(AWP_m) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) - \frac{1}{m}\, y(t) =: f_m(t, y(t)), \\ y(t_0) = \left(1 - \frac{1}{m}\right) x_0 =: y_{0,m} \end{cases}$$

Da die Summe zweier lokal Lipschitz-stetiger Fkt'n selbst wieder lokal Lipschitz-stetig ist, ist f_n jeweils lokal Lipschitz-stetig. Es gilt nun

$$\forall t \geq 0 \ \forall y \in \partial U_R(0): \ (f_n(t,y) \mid y) = (f(t,y) \mid y) - \|y\|_2^2 \cdot 1/n$$
$$\leq -R/n < 0$$

und $\|y_{0,n}\|_2 = (1 - \frac{1}{n}) \|x_0\|_2 < R$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert also nach dem schon Gezeigten eine eindeutige, global nach rechts existente Lsg y_n, die zudem auf $[t_0, \infty)$ durch R beschränkt ist.

Ferner gilt: $y_{0,n} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ und

$$\forall K \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^d \text{ kompakt}: \ \sup_{(s,z) \in K} \|f_n(s,z) - f(s,z)\|_2$$
$$= \underbrace{\sup_{(s,z) \in K} \|z\|_2}_{< \infty} \cdot 1/n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Der Satz von der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten liefert daher für alle $b \in [t_0, \omega_+)$:

$$\sup_{t_0 \leq t \leq b} \|x(t) - y_n(t)\|_2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Dies impliziert $\sup_{t_0 \leq t \leq b} \|x(t)\|_2 \leq R \quad \forall b \in [t_0, \omega_+)$

$$\Rightarrow \sup_{t_0 \leq t < \omega_+} \|x(t)\|_2 \leq R \underset{A6)}{\Rightarrow} \omega_+ = \infty$$

$\Rightarrow$ x existiert global nach rechts und ist auf $[t_0, \infty)$ durch R beschränkt

□