KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
18.04.2013

1. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 25.04.2013, 14:00 Uhr

Auf diesem und allen folgenden Übungsblättern sind die betrachteten Vektorräume (sofern nichts Gegenteiliges vermerkt ist) reelle oder komplexe Vektorräume.

Aufgabe 1

Weisen Sie nach, dass jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum bereits ein Banachraum ist.

Aufgabe 2 (K)

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Beweisen Sie die nachfolgenden Aussagen.

a) Ist $W \subsetneq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum von V, so existiert zu jedem $\epsilon \in (0,1)$ ein $v \in V \setminus W$ mit $\|v\| = 1$ und $\operatorname{dist}(v, W) := \inf_{w \in W} \|v - w\| \geq \epsilon$. (*Lemma von Riesz*)

(*Hinweis: Begründen Sie die Existenz von Vektoren $x \in V \setminus W$ und $y \in W$ mit $\|x - y\| \leq \epsilon^{-1} \operatorname{dist}(x, W)$.*)

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- **(i)** Der Raum V ist endlichdimensional.
- **(ii)** Jede beschränkte Folge in $(V, \|\cdot\|)$ besitzt eine konvergente Teilfolge
- **(iii)** Jede in $(V, \|\cdot\|)$ beschänkte und abgeschlossene Menge ist kompakt..
- **(iv)** Die abgschlossene Einheitskugel $B_V := \{v \in V;\ \|v\| \leq 1\}$ ist kompakt.

(*Hinweis: Wir sagen, eine Menge $K \subseteq V$ sei in $(V, \|\cdot\|)$ kompakt, falls jede Folge aus K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wieder in K liegt.*)

Aufgabe 3

Man zeige, dass ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ genau dann vollständig ist, wenn jede absolut konvergente Reihe in V schon konvergent ist.

(*Hinweis: Zum Beweis der Hinlänglichkeit betrachten Sie eine beliebige Cauchyfolge $(x_n)_n$ in $(V, \|\cdot\|)$ und finden eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ so, dass $\|x_n - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ für alle $n \geq n_k$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Betrachten Sie anschließend die Reihe $x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$.*)

– bitte wenden –

Aufgabe 4 (K)

Es sei $d \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^d$ und $\|\cdot\|_M$ eine Norm auf $\mathbb{K}^{d\times d}$. Für $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ definieren wir

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup_{x\in\mathbb{K}^d\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ eine wohldefinierte, submultiplikative Norm auf $\mathbb{K}^{d\times d}$ ist mit $\|Ax\| \le \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|x\|$ für alle $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und alle $x \in \mathbb{K}^d$.

b) Zeigen Sie, dass für $\|A\|_M = \max\{|a_{ij}|;\ i,j \in \{1,\dots,d\}\}$ ($A \in \mathbb{K}^{d\times d}$) im Falle $d \ge 2$ die Norm $\|\cdot\|_M$ nicht submultiplikativ ist.

c) Berechnen Sie $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ in den Fällen

(i) $\|x\| = \|x\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n|$ für alle $x = (x_1,\dots,x_d)^T \in \mathbb{K}^d$;

(ii) $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{n=1,\dots,d} |x_n|$ für alle $x = (x_1,\dots,x_d)^T \in \mathbb{K}^d$.

d) Verifizieren Sie die Formel $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und $\operatorname{tr} A$ die Spur der Matrix A bezeichne.

Literatur

Als Vorlesungsbegleitung können die nachstehenden Bücher empfohlen werden.

[1] J. Hale, H. Koçak: *Dynamics and Bifurcation.* Springer, 1991.

[2] H. Heuser: *Funktionalanalysis.* Teubner.

[3] W. Walter: *Analysis 2.* Springer.

[4] W. Walter: *Ordinary Differential Equations.* Springer, 1998.

[5] N. Young: *An introduction to Hilbert Space.* Cambridge University Press.