KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
20.06.2013

10. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 27.06.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 37 (K)

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum und es seien $P, Q \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ mit $P^2 = P$ und $Q^2 = Q$. Beweisen Sie die nachstehenden Behauptungen.

a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- **(i)** Der Operator P ist eine orthogonale Projektion, d.h., es gilt $P(\mathcal{H}) \perp \mathrm{N}(P)$.
- **(ii)** Es gilt $(Px|y) = (x|Py)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.
- **(iii)** Der Operator $I - P$ ist eine orthogonale Projektion.

b) Ist P eine orthogonale Projektion, dann gelten die folgenden Aussagen.

- **(i)** Man hat $\|Px\|^2 = (Px|x)$ für alle $x \in \mathcal{H}$.
- **(ii)** Ist $P \neq 0$, so gilt $\|P\| = 1$

c) Sind P und Q Orthogonalprojektionen, so sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- **(i)** Der Operator $P - Q$ ist eine orthogonale Projektion.
- **(ii)** Es gilt $\|Px\| \geq \|Qx\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$.
- **(iii)** Man hat $Q(\mathcal{H}) \subseteq P(\mathcal{H})$.
- **(iv)** Die Gleichung $PQ = Q$ ist erfüllt.
- **(v)** Es gilt $QP = Q$.
- **(vi)** Der Operator $P - Q$ ist idempotent.

Aufgabe 38 (K)

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum und $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{H}$. Mit $\mathrm{LH}(U)$ bezeichnen wir die lineare Hülle der Menge U. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt $U^\perp = \overline{\mathrm{LH}(U)}^\perp$ sowie $(U^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{LH}(U)}$.

b) Genau dann gilt $\overline{\mathrm{LH}(U)} = \mathcal{H}$, wenn $U^\perp = \{0\}$ erfüllt ist.

c) Wir betrachten auf $\mathrm{C}([-1,1])$ das Skalarprodukt

$$(f|g) := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \qquad (f, g \in \mathrm{C}([0,1]))$$

und die zugehörige Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathrm{C}([-1,1])$. Dann ist der Unterraum $V := \{f \in \mathrm{C}([-1,1]);\ f|_{[-1,0]} \equiv 0\}$ in $(\mathrm{C}([-1,1]), \|\cdot\|_2)$ abgeschlossen mit $V \oplus V^\perp \neq \mathrm{C}([-1,1])$.

– bitte wenden –

Aufgabe 39

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein (nicht notwendigerweise separabler) nichttrivialer Hilbertraum, V ein abgeschlossener Unterraum und W ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Dann ist auch $V + W$ abgeschlossen.

b) Die Mengen

$$U := \{(x_n)_n \in \ell^2;\ x_{2k} = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$

und

$$V := \{(x_n)_n \in \ell^2;\ x_{2k-1} = kx_{2k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$

sind abgeschlossene Unterräume von $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ mit $U \cap V = \{0\}$, deren Summe $U \oplus V$ jedoch nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 40

Beweisen Sie, dass ein Hilbertraum $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ entweder endlichdimensional ist oder keine abzählbare algebraische Basis (d.i. eine Basis im Sinne der linearen Algebra) besitzt.

Bonusaufgabe

Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ x \mapsto \mathrm{e}^{i\lambda x}$$

und wir definieren $\mathcal{H} := \mathrm{LH}(\{f_\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}\}) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Vermöge

$$(\cdot|\cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C};\ (f, g) \mapsto \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

ist auf $\mathcal{H}$ ein wohldefiniertes Skalarprodukt gegeben.

b) Der Innenproduktraum $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ist nicht separabel, d.h., es existiert keine abzählbare Teilmenge $A \subseteq \mathcal{H}$, deren Abschluss in $\mathcal{H}$ mit ganz $\mathcal{H}$ übereinstimmt.

Informationen zur Modulprüfung

Prüfungen:

Die Modulprüfung zur 2-stündigen Vorlesung “Differentialgleichungen” findet statt am

6. August 2013 von 10-11 Uhr im Tulla HS

Die Modulprüfung zur 4-stündigen Vorlesung “Differentialgleichungen und Hilberträume” findet statt am

6. August 2013 von 10-12 Uhr im HS 37

Anmeldungen:

- Studierende der **Mathematik** melden sich über über QUISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) an (die Prüfung zur 2-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 265, die Prüfung zur 4-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 136).

- Studierende der **Physik** melden sich bei Frau S. Fuchs (Zimmer 3A 05.1, Allianzgebäude) an. **Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Studienbüro mitzubringen!**

Anmeldeschluss: 31.07.2013