KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
27.06.2013

11. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 04.07.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 41

Es seien $(\mathcal{H}_k, (\cdot|\cdot)_k)$ $(k \in \{1,2,3\})$ Hilberträume mit zugehörigen Normen $\|\cdot\|_k$. Ferner bezeichne

$$J_k : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k';\ x \mapsto (\,\cdot\,|x)_k$$

den konjugiert linearen Riesz-Isomorphismus. Darüber hinaus seien $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ und $S \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$. Nun definieren wir den zu T *transponierten* oder *dualen Operator* T' vermöge

$$T' : \mathcal{H}_2' \to \mathcal{H}_1';\ y' \mapsto y' \circ T.$$

Schließlich definieren wir *den zu T adjungierten Operator* $T^\star$ durch $T^\star := J_1^{-1} T' J_2$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt $T' \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2', \mathcal{H}_1')$.

b) Der Operator $T^\star$ ist der eindeutig bestimmte Operator $\widetilde{T} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, der $(Tx|y)_2 = (x|\widetilde{T}y)_1$ für alle $x \in \mathcal{H}_1$ und alle $y \in \mathcal{H}_2$ erfüllt.

c) Es gilt $T^{\star\star} := (T^\star)^\star = T$.

d) Man hat $(ST)^\star = T^\star S^\star$.

e) Die Abbildung
$$\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1);\ T \mapsto T^\star$$
ist ein isometrischer konjugiert linearer Isomorphismus.

f) Es gilt $\|T^\star T\| = \|T\|^2$.

g) Es gilt $\mathrm{N}(T) = \big((T^\star)(\mathcal{H})\big)^\perp$.

Aufgabe 42 (K)

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum und $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform.

(i) B heißt *beschränkt*, falls ein $c_1 > 0$ derart existiert, dass $|B(x,y)| \le c_1 \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ erfüllt ist.

(ii) B heißt *koerziv*, falls es ein $c_2 > 0$ so gibt, dass $\operatorname{Re} B(x,x) \ge c_2 \|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.

Beweisen Sie die nachstehenden Aussagen.

a) Ist B beschränkt, so existiert genau ein Operator $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ mit $B(x,y) = (x|Ty)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und es gilt $\|T\| \le c_1$.

b) Sind (i) und (ii) erfüllt, so ist der Operator aus Teil a) bijektiv mit $T^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ und es gilt $\|T^{-1}\| \le \frac{1}{c_2}$.

c) Sind (i) und (ii) erfüllt, so gibt es zu jedem $\varphi \in \mathcal{H}'$ genau ein $y \in \mathcal{H}$ mit $\varphi = B(\cdot, y)$.

(*Satz von Lax-Milgram*)

– bitte wenden –

Aufgabe 43

Es seien $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen ($d \in \mathbb{N}$) und $u \in \mathrm{C}^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit $u_{x_j} \in L^2(\Omega)$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$. Dann gilt $u \in H^1(\Omega)$ und die klassischen partiellen Ableitungen stimmen mit den zugehörigen schwachen Ableitungen überein.

(*Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fubini auf geeignete Weise an, um anschließend in einem eindimensionalen Integral partiell zu integrieren; hierbei kann es nützlich sein, zu beachten, dass jede (nichtleere) in $\mathbb{R}$ offene Menge als Vereinigung von höchstens abzählbar unendlich vielen, paarweise disjunkten Intervallen geschrieben werden kann (das brauchen Sie nicht zu beweisen).*)

Aufgabe 44 (K)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es seien $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Ferner sei $f \in \mathrm{C}([a,b])$ mit $f|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathrm{C}^1([x_{j-1}, x_j])$. Dann gilt $f|_{(a,b)} \in H^1((a,b))$.

b) Die Funktion $g : (-1,1) \to \mathbb{R};\ t \mapsto \begin{cases} -1, & -1 < t < 0, \\ 1, & 0 \leq t < 1, \end{cases}$ ist nicht schwach differenzierbar.

Bonusaufgabe

Es sei X eine beliebige nichtleere Menge und $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum mit $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{K}^X$, d.h., $\mathcal{H}$ ist eine Menge von auf X definierten $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen.
Man sagt, der Raum $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ besitzt einen *reproduzierenden Kern*, falls eine Funktion $K : X \times X \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- Für alle $x \in X$ gilt $K_x := K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$,
- es gilt $f(x) = (f|K_x)$ für alle $x \in X$ und alle $f \in \mathcal{H}$;

die Funktion K heißt dann *reproduzierender Kern von $\mathcal{H}$*.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Besitzt $\mathcal{H}$ einen reproduzierenden Kern K, so ist dieser eindeutig bestimmt und es gelten

(i) $K(x,x) \geq 0$,

(ii) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ und

(iii) $|f(x)| \leq \|f\| \sqrt{K(x,x)}$

für alle $x, y \in X$ und alle $f \in \mathcal{H}$.

b) Der Raum $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ besitzt genau dann einen reproduzierenden Kern, wenn die Abbildungen $\delta_x : \mathcal{H} \to \mathbb{K};\ f \mapsto f(x)$ für alle $x \in X$ stetig sind.

c) Besitzt $\mathcal{H}$ einen reproduzierenden Kern K, so ist die Menge $\mathrm{LH}\{K_x;\ x \in X\}$ dicht in $\mathcal{H}$.

d) Ist $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ und besitzt $\mathcal{H}$ einen reproduzierenden Kern K, so gilt $K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)\overline{e_n(y)}$ für alle $(x,y) \in X \times X$.

Informationen zur Modulprüfung

Prüfungen:

Die Modulprüfung zur 2-stündigen Vorlesung “Differentialgleichungen” findet statt am

6. August 2013 von 10-11 Uhr im Tulla HS

Die Modulprüfung zur 4-stündigen Vorlesung “Differentialgleichungen und Hilberträume” findet statt am

6. August 2013 von 10-12 Uhr im HS 37

Anmeldungen:

- Studierende der **Mathematik** melden sich über über QUISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) an (die Prüfung zur 2-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 265, die Prüfung zur 4-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 136).
- Studierende der **Physik** melden sich bei Frau S. Fuchs (Zimmer 3A 05.1, Allianzgebäude) an. **Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Studienbüro mitzubringen!**

Anmeldeschluss: 31.07.2013