KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
04.07.2013

12. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 11.07.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 45 (K)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) offen und es existiere ein $c > 0$ und ein $j \in \{1, \ldots, d\}$ mit $|x_j| \leq c$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \Omega$ (man nennt dann Ω *in eine Richtung beschränkt*). Zeigen Sie, dass

$$\|u\|_{L^2} \leq \sqrt{2}c\|u\|_{H_0^1}$$

für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt (*Poincaré-Friedrichs-Ungleichung*).

Aufgabe 46

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Innenproduktraum, $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ eine *hermitesche* Sesquilinearform, d.h., es gelte $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$, und es sei $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Man hat
$$\operatorname{Re} B(x,y) = \frac{1}{4}(B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y))$$
für alle $x, y \in \mathcal{H}$.

b) Es gilt $\sup\{|(Tx|y)|;\ x, y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\|, \|y\| \leq 1\} = \|T\|$.

c) Ist T sogar symmetrisch, so gilt
$$q(T) := \sup\{|(Tx|x)|;\ x \in \mathcal{H} \text{ mit } \|x\| \leq 1\} = \|T\|.$$
(*Hinweis: Benutzen Sie Teil a) mit* $B_T(x,y) = (Tx|y)$, *um* $\|T\| \leq q(T)$ *einzusehen.*)

Aufgabe 47 (K)

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Bezeichnet $\mathcal{K}(X,Y)$ die Menge aller kompakten Operatoren von X nach Y und ist $(Y, \|\cdot\|_Y)$ vollständig, so ist $\mathcal{K}(X,Y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{B}(X,Y)$.

b) Es seien $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ und $S \in \mathfrak{B}(Y,Z)$. Ist einer der beiden Operatoren T oder S kompakt, dann trifft dies auch auf ST zu.

c) Ist $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ und existiert ein $S \in \mathfrak{B}(Y,X)$ mit $ST = I_X$, so ist X endlichdimensional.

Aufgabe 48

Es sei $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n)_n$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ und $p \in [1, \infty]$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T_{\boldsymbol{\alpha}} : \ell^p \to \ell^p;\ (x_n)_n \mapsto (\alpha_n x_n)_n.$$

Zeigen Sie, dass $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ genau dann kompakt ist, wenn $\boldsymbol{\alpha}$ eine Nullfolge ist.

– bitte wenden –

Bonusaufgabe

Alle in dieser Aufgabe auftretenden Vektorräume sind als reelle Vektorräume zu betrachten.
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) offen und in eine Richtung beschränkt. Es sei $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$ (d.h. $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, wobei $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$) derart, dass ein $\gamma > 0$ existiert mit

$$(A(x)\xi|\xi) \geq \gamma\|\xi\|_2^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und alle $x \in \Omega$. Des Weiteren sei $f \in (H_0^1(\Omega))'$ und $g \in H^1(\Omega)$. Ferner seien $b \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ (d.h., es gilt $b_j \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für $j \in \{1, \dots, d\}$, wobei $b = (b_1, \dots, b_d)$) und $c \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$c - \frac{1}{2}\operatorname{div} b \geq 0 \qquad \text{(Lebesgue-fast überall) auf } \Omega$$

(wobei wie üblich $\operatorname{div} b := \sum_{j=1}^d \frac{\partial b}{\partial x_j}$). Wir betrachten den Operator

$$L : H^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))'; \; u \mapsto Lu,$$

wobei

$$(Lu)[v] := \int_\Omega \Big(\big(A(x)\nabla u(x)\big|\nabla v(x)\big) + \big(b(x)\big|\nabla u(x)\big)v(x) + c(x)u(x)v(x) \Big)\, dx$$

für $u \in H^1(\Omega)$ und $v \in H_0^1(\Omega)$.

Beweisen Sie, dass L wohldefiniert ist und dass es genau ein $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\begin{cases} Lu = f, \\ u - g \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

gibt.

(*Hinweis: Bringen Sie den Satz von Lax-Milgram zur Anwendung.*)

Informationen zur Modulprüfung

Prüfungen:

Die Modulprüfung zur 2-stündigen Vorlesung "Differentialgleichungen" findet statt am

6. August 2013 von 10-11 Uhr im Tulla HS

Die Modulprüfung zur 4-stündigen Vorlesung "Differentialgleichungen und Hilberträume" findet statt am

6. August 2013 von 10-12 Uhr im HS 37

Anmeldungen:

- Studierende der **Mathematik** melden sich über über QUISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) an (die Prüfung zur 2-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 265, die Prüfung zur 4-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 136).
- Studierende der **Physik** melden sich bei Frau S. Fuchs (Zimmer 3A 05.1, Allianzgebäude) an. **Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Studienbüro mitzubringen!**

Anmeldeschluss: 31.07.2013