KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
11.07.2013

13. und letztes Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 18.07.2013, 14:00 Uhr

Im Folgenden sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein separabler, unendlichdimensionaler Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ symmetrisch. Wir setzen nun

$$\alpha := \begin{cases} \infty, & \text{falls } |\,\sigma_p(T) \setminus \{0\}| = \infty, \\ |\,\sigma_p(T) \setminus \{0\}|, & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie

$$\mathbb{N}_\alpha := \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{falls } \alpha = \infty, \\ \{1, \dots, \alpha\}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und schreiben $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}_\alpha\}$ mit $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$ $(n, m \in \mathbb{N}_\alpha)$. Ferner sei $\lambda_0 := 0$. Des Weiteren definieren wir $d_\lambda := \dim \mathrm{N}(\lambda - T) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ für $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \{0\}$(wir unterscheiden also hier bei d_λ und auch im Folgenden nicht zwischen verschiedenen unendlichen Kardinalzahlen). Schließlich gelte

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x|u_k) u_k \qquad (x \in \mathcal{H})$$

mit einer Orthonormalbasis $\{u_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}$ und einer reellen Nullfolge $(\mu_k)_k$ (vgl. Satz 13.8).

Aufgabe 49 (K)

Für $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \{0\}$ setzen wir $A_\lambda := \{k \in \mathbb{N};\ \mu_k = \lambda\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gilt $\mathrm{N}(\lambda - T) = \overline{\mathrm{LH}\{u_k;\ k \in A_\lambda\}}$ und $d_\lambda = |A_\lambda| \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ für alle $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \{0\}$.

b) Für $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ gilt $d_\lambda < \infty$.

c) Es gilt $(\lambda - T)(\mathcal{H}) = \overline{\mathrm{LH}\{u_k;\ k \in \mathbb{N} \setminus A_\lambda\}}$ und $\dim(\mathcal{H}/(\lambda - T)(\mathcal{H})) = d_\lambda$ für alle $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ (**Bonusaufgabe**).

Aufgabe 50 (K)

Wir verwenden die Notation aus Aufgabe 49. Des Weiteren definieren wir das sog. *Spektrum von* T vermöge $\sigma(T) := \sigma_p(T) \cup \{0\}$ und setzen $B(\sigma(T)) := \{f : \sigma(T) \to \mathbb{K};\ f \text{ ist beschränkt}\}$. Versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ wird $B(\sigma(T))$ zu einem Banachraum. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\Phi_T : B(\sigma(T)) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H});\ f \mapsto \Phi_T(f),$$

wobei

$$\Phi_T(f)x := \sum_{k=1}^{\infty} f(\mu_k)(x|u_k)u_k$$

für alle $x \in \mathcal{H}$ und alle $f \in B(\sigma(T))$. Beweisen Sie die nachstehenden Behauptungen.

a) Die Menge $\sigma(T)$ ist kompakt.

b) Φ_T ist eine wohldefinierte, stetige, lineare Abbildung mit den folgenden Eigenschaften.

– **bitte wenden** –

(i) Es gilt $\Phi_T(\mathbb{1}) = I_\mathcal{H}$ und $\Phi_T(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = T$.

(ii) Für alle $f, g \in B(\sigma(T))$ gilt $\Phi_T(fg) = \Phi_T(f)\Phi_T(g)$.

(iii) Es gilt $(\Phi_T(f)x|y) = (x|\Phi_T(g)y)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und alle $f, g \in B(\sigma(T))$ mit $g(\mu_n) = \overline{f(\mu_n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Es gilt $\|\Phi_T(f)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(\mu_n)|$ für alle $f \in B(\sigma(T))$.

c) Ist $\{e_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ eine weitere Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ mit $Te_k = \nu_k e_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (wobei $\nu_k \in \sigma_p(T)$), so gilt $\Phi_T(f)x = \sum_{k=1}^{\infty} f(\nu_k)(x|e_k)e_k$ für alle $x \in \mathcal{H}$ und alle $f \in B(\sigma(T))$.

d) Der Operator $\Phi_T(f)$ ist genau dann symmetrisch, wenn $f(\mu_n) \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

e) Ist $A \subseteq \sigma(T)$, so ist $\Phi_T(\mathbb{1}_A)$ eine orthogonale Projektion und man hat $\Phi_T(\mathbb{1}_{\{\lambda\}})(\mathcal{H}) = \mathrm{N}(\lambda - T)$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$.

f) Es gilt $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda - T \text{ ist nicht stetig invertierbar}\}$.

g) Es gilt $\sigma(\Phi_T(f)) := \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda - \Phi_T(f) \text{ ist nicht stetig invertierbar}\} = \overline{\{f(\mu_m);\ m \in \mathbb{N}\}}$ für alle $f \in B(\sigma(T))$ sowie $\sigma(\Phi_T(f)) = f(\sigma(T))$ für jedes $f \in \mathrm{C}(\sigma(T))$.

h) Ist $f \in \mathrm{C}(\sigma(T))$ reellwertig und $(f(\mu_k))_k$ eine Nullfolge, so ist $\Phi_T(f)$ kompakt und symmetrisch und es gilt $\Phi_T(g \circ f) = \Phi_{\Phi_T(f)}(g)$ für alle $g \in B(\sigma(\Phi_T(f)))$.

i) Ist $(f_n)_n$ eine beschränkte Folge in $B(\sigma(T))$, die auf $\sigma(T)$ punktweise gegen eine Funktion $f \in B(\sigma(T))$ konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} \Phi_T(f_n)x = \Phi_T(f)x$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Insbesondere gilt $\Phi_T(f)x = \sum_{n=0}^{\alpha} f(\lambda_n)P_n x$ für alle $x \in \mathcal{H}$ und alle $f \in B(\sigma(T))$, wobei P_n für $n \in \mathbb{N}_\alpha \cup \{0\}$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{N}(\lambda_n - T)$ (längs $\mathrm{N}(\lambda_n - T)^\perp$) bezeichne (**Bonusaufgabe**).

Bemerkung: Aufgrund der obigen Eigenschaften der Abbildung Φ_T schreibt man auch $f(T)$ anstelle von $\Phi_T(f)$. Die Abbildung Φ_T heißt *der beschränkte (messbare) Funktionalkalkül von* T.

Aufgabe 51

Wir verwenden die Notation aus den Aufgaben 49 und 50. Wir nennen einen Operator $S \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *positiv*, falls S symmetrisch ist und $(Sx|x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Der Operator T ist genau dann positiv, wenn $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$ erfüllt ist.

b) Ist T positiv und $n \in \mathbb{N}$, so gibt es einen eindeutig bestimmten kompakten, positiven Operator S mit $S^n = T$; dieser wird mit $T^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet.

c) Ist T positiv und $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, so existiert eine Funktion $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, welche das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$\begin{cases} u''(t) = -Tu(t), & \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = x_0, \\ u'(0) = x_1, \end{cases} \tag{1}$$

löst.

Informationen zur Modulprüfung

Prüfungen:

Die Modulprüfung zur 2-stündigen Vorlesung “Differentialgleichungen” findet statt am

6. August 2013 von 10-11 Uhr im Tulla HS

Die Modulprüfung zur 4-stündigen Vorlesung “Differentialgleichungen und Hilberträume” findet statt am

6. August 2013 von 10-12 Uhr im HS 37

Anmeldungen:

- Studierende der **Mathematik** melden sich über über QUISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) an (die Prüfung zur 2-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 265, die Prüfung zur 4-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 136).
- Studierende der **Physik** melden sich bei Frau S. Fuchs (Zimmer 3A 05.1, Allianzgebäude) an. **Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Studienbüro mitzubringen!**

Anmeldeschluss: 31.07.2013