KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
25.04.2013

2. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 02.05.2013, 14:00 Uhr

Im Folgenden bezeichne $\|\cdot\|_2$ stets die euklidische Norm auf dem jeweiligen $\mathbb{R}^N$.

Aufgabe 5

Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) offen und nichtleer, $f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig und es sei $(t_0, x_0) \in D$. Nach dem Satz von Peano besitzt das Anfangswertproblem

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

wenigstens eine Lösung. Ziel dieser Aufgabe ist der Nachweis, dass jede Lösung dieses Problems die Restriktion einer nicht fortsetzbaren Lösung ist.

Fixieren Sie hierzu irgendeine Lösung $x_a : J_a \to \mathbb{R}^p$ des Problems (1) (wobei $J_a \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist mit $t_0 \in J_a$) und betrachten Sie die Menge

$$\mathcal{L} := \{(J, x);\ J_a \subseteq J \subseteq \mathbb{R} \text{ ein Intervall, } x \in \mathrm{C}^1(J, \mathbb{R}^p) \text{ eine Lösung von (1) mit } x|_{J_a} = x_a\}.$$

Beweisen Sie zunächst, dass vermöge

$$(J, x) \preceq (\widetilde{J}, \widetilde{x}) :\Longleftrightarrow J \subseteq \widetilde{J} \text{ und } \widetilde{x}|_J = x$$

eine partielle Ordnung auf $\mathcal{L}$ definiert wird. Benutzen Sie anschließend diese partielle Ordnung sowie das Lemma von Zorn, um die Existenz einer nicht fortsetzbaren Lösung von (1), welche x_a fortsetzt, zu zeigen.

Aufgabe 6 (K)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ offen und nichtleer, $f : D \to \mathbb{R}^p$ stetig und bzgl. x lokal Lipschitz-stetig. Es sei $(t_0, x_0) \in D$ und $x : [t_0, t_+) \to \mathbb{R}^p$ eine Lösung des Anfangswertproblemes

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $t_+ = \omega_+$ genau dann gilt, wenn einer der folgenden Fälle eintritt.

(i) Es gilt $t_+ = \infty$.

(ii) Es gilt $\lim_{t \to t^+} \|x(t)\|_2 = \infty$.

(iii) Es gilt $\underline{\lim}_{t \to t^+} \operatorname{dist}((t, x(t)), \partial D) = 0$.

(*Hinweise: Für einen Punkt* $\xi \in \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) *und eine Menge* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *setzen wir* $\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\|x - a\|_2;\ a \in A\}$. *Für eine Funktion* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ (*mit* $-\infty < a < b \leq \infty$) *definiert man* $\underline{\lim}_{t \to a} f(t) := \sup_{a \leq \tau < b} \inf\{f(t);\ \tau \leq t < b\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Es könnte hilfreich sein, sich den Satz von Picard-Lindelöf für Rechteckmengen in Erinnerung zu rufen.)

– bitte wenden –

Aufgabe 7 (K)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\rho \in \mathrm{C}^1([a,b])$ genüge der *strikten Differentialungleichung*

$$\rho'(t) < f(t, \rho(t)), \qquad t \in [a,b].$$

Ferner löse $\varphi \in \mathrm{C}^1([a,b])$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(a) = \varphi_0, \end{cases}$$

mit einen $\varphi_0 > \rho(a)$. Dann gilt $\rho(t) < \varphi(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Eine analoge Aussage gilt, wenn alle Ungleichheitszeichen umgekehrt werden.

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x^2(t), \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

(dessen Lösung keine analytisch elementare Darstellung besitzt). Für die maximale rechte Existenzzeit gilt $1 < \omega_+ \leq 1 + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

(*Hinweis: Betrachten Sie die Vergleichsprobleme*

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y^2(t), \\ y(0) = \tan(\epsilon), \end{cases}$$

(mit einem hinlänglich kleinen $\epsilon > 0$) und

$$\begin{cases} z'(t) = 1 + z^2(t), \\ z(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

und benutzen Sie Teil a).)

Aufgabe 8

Es sei $\mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$, $d \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $t_0 > 0$ und $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion, die auf $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^d$ bzgl. der zweiten Variablen lokal Lipschitz-stetig sei und zudem $(f(t,x)|x) \leq 0$ für alle $t > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\|_2 = R$ erfülle; hierbei bezeichnet $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$. Es sei darüber hinaus $x_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x_0\|_2 \leq R$.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

eine eindeutige, global nach rechts existente, auf $[t_0, \infty)$ durch R beschränkte Lösung besitzt.

(*Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass $(f(t,x)|x) < 0$ für alle $t > 0$ und $\|x\|_2 = R$ gilt und dass $\|x_0\|_2 < R$ erfüllt ist. Hierbei könnte es hilfreich sein, die Ableitung der Funktion $\|x(\cdot)\|_2^2$ zu berechnen. Führen Sie anschließend den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurück. Dabei könnte es nützlich sein, anstelle von f die durch $f_n(t,x) := f(t,x) - \frac{1}{n}x$ $(n \in \mathbb{N})$ definierten Funktionen zu betrachten.*)