KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
02.05.2013

3. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Freitag, den 10.05.2013, 14:00 Uhr

Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) eine nichtleere offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^d$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Für $x \in D$ bezeichnen wir mit $\omega_\pm(x)$ die maximalen Existenzzeiten der eindeutig bestimmten, nicht fortsetzbaren Lösung $u(\cdot\,;x)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(0) = x, \end{cases} \tag{1}$$

und setzen $I(x) := (\omega_-(x), \omega_+(x))$. Mit $\mathcal{O}(x) := \{u(t\,;x);\ t \in (\omega_-(x), \omega_+(x))\}$ bezeichnen wir den den Orbit von x und setzen $\mathcal{O}^+(x) := \{u(t\,;x);\ t \in [0, \omega_+(x))\}$.

Aufgabe 9 (K)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $x \in D$ und $\tau \in I(x)$, so gilt $I(u(\tau\,;x)) = I(x) - \tau$.

b) Ist $x \in D$, $t \in I(x)$ und $s \in I(u(t\,;x))$, so gilt $u(s\,;u(t\,;x)) = u(t+s\,;x)$.

c) Sind $x, y \in D$ mit $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$, so gilt schon $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$.

d) Ist $x_0 \in D$ eine Gleichgewichtslösung[1] von (1) und ist $x \in D$ derart, dass ein $t_0 \in I(x)$ mit $u(t_0\,;x) = x_0$ existiert, so gilt schon $u(t\,;x) = x_0$ für alle $t \in I(x)$.

Aufgabe 10

Für $x \in D$ definiert man die sog. *ω-Limesmenge $\omega(x)$ von x* vermöge

$$\omega(x) := \bigcap_{t \in [0, \omega_+(x))} \overline{\mathcal{O}^+(u(t\,;x))}.$$

Beweisen Sie die nachstehenden Behauptungen.

a) Ist $x \in D$ mit $\omega_+(x) < \infty$, so gilt $\omega(x) = \emptyset$ genau dann, wenn $\lim_{t \to \omega_+(x)} \|u(t\,;x)\|_2 = \infty$ erfüllt ist.

b) Ist $x \in D$ mit $\omega_+(x) = \infty$, so gilt

$$\omega(x) = \big\{\xi \in \mathbb{R}^d;\ \exists\ (t_n)_n \in [0,\infty)^{\mathbb{N}} :\ \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} u(t_n\,;x) = \xi\big\}.$$

– bitte wenden –

[1] Die Begriffe *Gleichgewichtslösung*, *stationäre Stelle*, *stationärer Punkt* und *Equilibrium* werden synonym gebraucht.

c) Sei $x \in D$ mit $\omega_+(x) = \infty$. Ist $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ eine kompakte Teilmenge von D, so ist $\omega(x)$ eine nichtleere, zusammenhängende und kompakte Teilmenge von D mit $I(y) = \mathbb{R}$ für alle $y \in \omega(x)$ und es gilt $u(t\,;\omega(x)) \subseteq \omega(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(u(t\,;x), \omega(x)) = 0.$$

(*Hinweis: Eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt zusammenhängend, falls es keine Zerlegung $A = A_1 \cup A_2$ von A in zwei paarweise disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Teilmengen A_1, A_2 gibt.*)

Aufgabe 11 (K)

a) Zeigen Sie: Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall, $g : J \to \mathbb{R}$ eine beliebige (!) Funktion und $x : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = g(x(t))$, so ist x monoton.

b) Sei nun J offen und g aus Teil a) zusätzlich auf J lokal Lipschitz-stetig und sei außerdem x wie in Teil a). Beweisen Sie, dass x dann entweder konstant oder streng monoton ist.

c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(0) := 0$ und $g(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$. Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t)), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

d) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ offen und nichtleer, $x_0 \in D$ und $g : D \to \mathbb{R}^d$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Ferner sei $x : I \to D$ die nicht fortsetzbare Lösung des autonomen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Beweisen Sie: Ist x nicht injektiv, so gilt schon $I = \mathbb{R}$ und x ist periodisch.

Aufgabe 12

Es sei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion, $m \in \mathbb{N}$ und $0 < x_1 < \ldots < x_{2m}$ derart, dass $g(x) < 0$ für alle $x \in (0, x_1) \cup (x_{2m}, \infty) \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} (x_{2k}, x_{2k+1})$ gilt, und derart, dass $g(x) > 0$ für alle $x \in \bigcup_{k=1}^{m} (x_{2k-1}, x_{2k})$ erfüllt sei. Für $x_0 \in [0, \infty)$ bezeichne u die eindeutige nicht fortsetzbare Lösung des autonomen Anfangswertproblems

$$(2) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t)g(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Implikationen

- **(i)** $0 < x_0 < x_1 \Longrightarrow 0 < u(t) < x_1$ für alle $t \in [0, \omega_+)$,
- **(ii)** $x_{2m} < x_0 \Longrightarrow x_{2m} < u(t)$ für alle $t \in [0, \omega_+)$,
- **(iii)** $x_k < x_0 < x_{k+1} \Longrightarrow x_k < u(t) < x_{k+1}$ für alle $t \in [0, \omega_+)$ und alle $1 \leq k \leq 2m - 1$.

b) Folgern Sie aus Teil a), dass $\omega_+ = \infty$ gilt.

c) Beweisen Sie: Ist $x_0 < x_1$, so gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

d) Weisen Sie nach: Gilt $x_0 \geq x_{2m}$ oder $x_{2m-1} < x_0 < x_{2m}$, so gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = x_{2m}$.

e) Verifizieren Sie: Ist $1 \leq k \leq m - 1$ und $x \in (x_{2k-1}, x_{2k+1})$, so gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = x_{2k}$.