KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
08.05.2013

4. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 16.05.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 13 (K)

a) Bestimmen Sie jeweils ein nichtkonstantes erstes Integral für die folgenden Differentialgleichungssysteme.

(i) $x'(t) = x^2(t)\mathrm{e}^{y(t)} + 1$, $y'(t) = 1 - 2x(t)\mathrm{e}^{y(t)}$.

(ii) $x'(t) = 2x^2(t) + 3x^3(t)y(t)$, $y'(t) = -3x(t)y(t) - 4x^2(t)y^2(t)$.

(*Hinweis: Versuchen Sie einen Ansatz der Form* $\lambda(x,y) = \mu(x \cdot y)$ *mit einem geeigneten* μ.)

b) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{R}$, für welche das Differentialgleichungssystem $x'(t) = x(t)$, $y'(t) = ky(t)$ ein nichtkonstantes erstes Integral besitzt.

(*Hinweis: Betrachten Sie* $\lambda(x,y) = x^{1-2k}y^{\frac{k-2}{k}}$ *für* $k < 0$.)

Aufgabe 14 (K)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $f \in \mathrm{C}(I)$ lokal Lipschitz-stetig mit $f(0) = 0$. Beweisen Sie die nachfolgenden Behauptungen über das autonome Anfangswertproblem

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

a) Es sei zusätzlich vorausgesetzt, dass ein $r > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in ((-r,r)\cap I)\setminus\{0\}$ existiere. Das Equilibrium 0 ist genau dann asymptotisch stabil ist, wenn $f(x) < 0$ für alle $x \in (0,r) \cap I$ und zugleich $f(x) > 0$ für alle $x \in (-r,0) \cap I$ erfüllt ist. In allen übrigen Fällen ist 0 instabil.

b) Existiert eine Nullfolge $(x_n)_n$ in $I\setminus\{0\}$ mit $f(x_n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), so ist 0 nicht asymptotisch stabil.

c) Es existiere eine Nullfolge $(x_n)_n$ in $(-\infty,0) \cap I$ mit $f(x_n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) sowie ein $r > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (0,r) \cap I$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in (0,r) \cap I$, so ist 0 instabil.

– bitte wenden –

(ii) Ist hingegen $f(x) < 0$ für alle $x \in (0, r) \cap I$ erfüllt, so ist 0 stabil.[1]

d) Existieren Nullfolgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ in I mit $x_n < 0 < y_n$ und mit $f(x_n) = f(y_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist 0 stabil.

Aufgabe 15

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von dem Parameter $c \in \mathbb{R}$) alle Equilibria der folgenden Differentialgleichungen und untersuchen Sie diese jeweils auf Stabilität und asymptotische Stabilität.

a) $x''(t) + c^2 x(t) = 0$

b) $x'(t) = -(1 + x(t))(x^2(t) - c)$

c) $x'(t) = f(x(t))$, wobei $f(0) := 0$ und $f(x) := x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 16

Es sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\|\cdot\|_{\text{op}}$ die von der euklidischen Norm gemäß Aufgabe 4 a) induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{d \times d}$ und $X(\cdot)$ eine Fundamentalmatrix für das lineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $S \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertierbar, so ist 0 genau dann für das lineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t)$ stabil bzw. asymptotisch stabil, wenn 0 für das System $y'(t) = S^{-1}ASy(t)$ stabil bzw. asymptotisch stabil ist.

b) Genau dann ist 0 stabil, wenn $\sup_{t \geq 0} \|X(t)\|_{\text{op}} < \infty$ erfüllt ist.

c) Dann und nur dann ist 0 asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t \to \infty} \|X(t)\|_{\text{op}} = 0$ gilt.

---

[1] Analog hat man auch die nachstehende Aussage.
Es existiere eine Nullfolge $(y_n)_n$ in $(0, \infty) \cap I$ mit $f(y_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ sowie ein $r > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (-r, 0) \cap I$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

i. *Ist $f(x) < 0$ für alle $x \in (-r, 0) \cap I$ erfüllt, so ist 0 instabil.*

ii. *Gilt jedoch $f(x) > 0$ für alle $x \in (-r, 0) \cap I$, so ist 0 stabil.*