KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
16.05.2013

5. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 23.05.2013, 14:00 Uhr

Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) eine nichtleere offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}^d$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1) \qquad \begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(0) = x \in D, \end{cases}$$

und benutzen die Notation von Blatt 3. Ferner sei $V : D \to \mathbb{R}$ eine Lyapunov-Funktion zu $y'(t) = f(y(t))$.

Aufgabe 17 (K)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für jede Lösung $u(\cdot\,;x)$ von (1) ist die Abbildung $V(u(\cdot\,;x))$ monoton fallend auf $I(x)$.

Bemerkung: Man umschreibt dieses Faktum auch kurz durch "V fällt monoton entlang aller Lösungen". Man nennt V außerdem eine *strikte Lyapunov-Funktion*, wenn V entlang nichtkonstanter Lösungen streng monoton fallend ist.

b) Für $c \in \mathbb{R}$ definieren wir $N_c := \{x \in D;\ V(x) \le c\}$. Ist $x \in N_c$, so gilt $\mathcal{O}^+(x) \subseteq N_c$.

c) Es sei $\omega_+(x) = \infty$ und es existiere eine Folge $(t_n)_n$ in $I(x)$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ derart, dass die Folge $(u(t_n\,;x))_n$ gegen ein $u_\infty \in D$ konvergiert. Ist nun V eine strikte Lyapunov-Funktion, dann gilt schon $f(u_\infty) = 0$.

(*Hinweis: Zeigen Sie, dass $u(\cdot\,;u_\infty)$ konstant ist.*)

d) Es sei $\omega_+(x) = \infty$ und V eine strikte Lyapunov-Funktion. Ist $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ eine kompakte Teilmenge von D, so ist $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ und es gilt $\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(u(t\,;x), f^{-1}(\{0\})) = 0$.

e) Es seien die folgenden beiden Bedingungen erfüllt.

- **(i)** Für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_2 = \infty$ gilt $\lim_{n\to\infty} V(x_n) = \infty$.[1]
- **(ii)** Für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, \partial D) = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} V(x_n) = \infty$.

Dann gilt $\omega_+(x) = \infty$, $\sup_{t\ge 0} \|u(t\,;x)\|_2 < \infty$ sowie $\inf_{t\ge 0} \operatorname{dist}(u(t\,;x), \partial D) > 0$ für alle $x \in D$. Ferner sind in diesem Falle alle Mengen N_c aus Teil b) kompakt.

– bitte wenden –

[1] Man nennt V in diesem Falle *koerziv*.

Aufgabe 18

Überführen Sie die sog. *van-der-Pol-Gleichung*

$$x''(t) = a(1 - x^2(t))x'(t) - x(t)$$

in ein System erster Ordnung. Bestimmen Sie dessen Equilibria und untersuchen Sie diese hinsichtlich ihres Stabilitätsverhaltens; hierbei ist $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Aufgabe 19 (K)

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$ und mit $xg(x) < 0$ für alle $x \neq 0$. Überführen Sie die Differentialgleichung $x''(t) = g(x(t))$ in ein System erster Ordnung, bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen und zeigen Sie, dass diese allesamt stabil sind.

(*Hinweis: Die Funktion* $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto \frac{1}{2}y^2 - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ *könnte nützlich sein.*)

Aufgabe 20

Wir betrachten auf $D = (0, \infty)^2$ den sog. *Brusselator*[2]

$$\begin{cases} x'(t) = a - bx(t) + x^2(t)y(t) - x(t), \\ y'(t) = bx(t) - x^2(t)y(t), \end{cases}$$

wobei $a, b > 0$.

a) Beweisen Sie, dass jede Lösung global nach rechts existiert.

b) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so haben alle (komplexen) Eigenwerte von A genau dann einen strikt negativen Realteil, wenn $\det A > 0$ und $\operatorname{tr} A < 0$ erfüllt ist. (Spezialfall des sog. *Routh-Hurwitz-Kriteriums*)

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte und untersuchen Sie deren Stabilitätsverhalten für den Fall $a^2 + 1 \neq b$.

(*Hinweis: Teil b) könnte hilfreich sein.*)

[2] Dieses Modell wurde von dem Physiknobelpreisträger I. Prigogine, dem Mathematiker G. Nicolis und deren Mitarbeitern zur Beschreibung chemischer Oszillationen eingeführt. Das Wort "Brusselator" ist ein Kofferwort, welches aus den Wörtern "oscillator" und "Brussels" ("Brüssel") enstanden ist (Prigogine war zu jener Zeit an der Freien Universität Brüssel tätig. Daher ist im deutschsprachigen Raum auch der Begriff "Brüsselator" gebräuchlich.).