KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
13.06.2013

9. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 20.06.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 33

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume.

a) Zeigen Sie: Ist $T \in \mathfrak{B}(X,Y)$ und $S \in \mathfrak{B}(Y,Z)$, so gilt

$$\|ST\|_{\mathfrak{B}(X,Z)} \leq \|S\|_{\mathfrak{B}(Y,Z)} \cdot \|T\|_{\mathfrak{B}(X,Y)}.$$

b) Weisen Sie nach, dass $(\mathfrak{B}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathfrak{B}(X,Y)})$ vollständig ist, falls $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum ist.

Bemerkung: Wird umgekehrt $(\mathfrak{B}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathfrak{B}(X,Y)})$ als vollständig vorausgesetzt, so ist $(Y, \|\cdot\|_Y)$ vollständig oder $X = \{0\}$.

Aufgabe 34

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen linearen Operatoren unbeschränkt sind.

a) $A : \mathcal{D}(A) \to (L^p([0,1]), \|\cdot\|_p);\ u \mapsto u''$,

wobei $\mathcal{D}(A) := \{u \in \mathrm{C}^2([0,1]);\ u(0) = u(1) = 0\} \subseteq (\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und $p \in [1,\infty]$

b) $A : \mathcal{D}(A) \to (\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty);\ u \mapsto (pu')' + qu$,

mit $\mathcal{D}(A) := \{u \in \mathrm{C}^2([0,1]);\ R_0 u = R_1 u = 0\} \subseteq (\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, wobei $q \in \mathrm{C}([0,1])$, $p \in \mathrm{C}^1([0,1])$ mit $p > 0$ und $R_j u = \alpha_{0,j} u(j) + \alpha_{1,j} p(j) u'(j)$ mit $(\alpha_{0,j}, \alpha_{1,j}) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für $j \in \{0,1\}$

Aufgabe 35 (K)

Es sei $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $p \in [1,\infty]$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T_{\boldsymbol{\alpha}} : \mathcal{D}(T_{\boldsymbol{\alpha}}) := \big\{(x_n)_n \in \ell^p;\ (\alpha_n x_n) \in \ell^p\big\} \to \ell^p;\ (x_n)_n \mapsto (\alpha_n x_n)_n.$$

a) Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Der Operator $T_{\boldsymbol{\alpha}} : (\mathcal{D}(T_{\boldsymbol{\alpha}}), \|\cdot\|_p) \to (\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ist stetig.

(ii) Die Folge $\boldsymbol{\alpha}$ ist beschränkt.

(iii) Es gilt $\mathcal{D}(T_{\boldsymbol{\alpha}}) = \ell^p$.

b) Bestimmen Sie $\|T_{\boldsymbol{\alpha}}\|$ für den Fall, dass $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ stetig ist.

– bitte wenden –

Aufgabe 36 (K)

Es sei $k \in \mathrm{C}([0,1]^2)$. Wir betrachten die Abbildung

$$V : (\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty);\ f \mapsto Vf$$

mit

$$(Vf)(t) := \int_0^t k(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s$$

für $t \in [0,1]$.

a) Zeigen Sie $V \in \mathfrak{B}(\mathrm{C}([0,1]))$ und bestimmen Sie $\|V\|$.

b) Weisen Sie nach, dass der Operator $\lambda I - V$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ injektiv ist.

(*Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion, dass* $\left|\frac{1}{\lambda^n}(V^n f)(t)\right| \le \frac{t^n \|k\|_\infty^n}{|\lambda|^n n!}\|f\|_\infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $t \in [0,1]$ gilt.)

Bonusaufgabe

a) Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und Y ein endlichdimensionaler Unterraum. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in X$ ein $y_0 \in Y$ mit $\|x - y_0\| = \inf\{\|x-y\|;\ y \in Y\}$ gibt. Demonstrieren Sie am Beispiel von $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, dass diese Bestapproximation i. Allg. nicht eindeutig ist.

b) In $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ betrachten wir den Unterraum

$$U := \left\{ f \in \mathrm{C}([0,1]) \,\middle|\, \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right\}.$$

Weisen Sie nach, dass die Funktion $\mathrm{id} : [0,1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto x$ keine Bestapproximation in U besitzt.
(*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass* $\inf_{f \in U} \|\mathrm{id} - f\|_\infty = \frac{1}{4}$ *gilt.*)

Informationen zur Modulprüfung

Prüfungen:

Die Modulprüfung zur 2-stündigen Vorlesung "Differentialgleichungen" findet statt am

6. August 2013 von 10-11 Uhr im Tulla HS

Die Modulprüfung zur 4-stündigen Vorlesung "Differentialgleichungen und Hilberträume" findet statt am

6. August 2013 von 10-12 Uhr im HS 37

Anmeldungen:

- Studierende der **Mathematik** melden sich über über QUISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) an (die Prüfung zur 2-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 265, die Prüfung zur 4-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 136).

- Studierende der **Physik** melden sich bei Frau S. Fuchs (Zimmer 3A 05.1, Allianzgebäude) an. **Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Studienbüro mitzubringen!**

Anmeldeschluss: 31.07.2013