Blatt 3 |

A 9 |

zu a) und b)

Die Abb.

$v_\tau : I(x) - \tau \to D \, ; \quad s \mapsto u(s+\tau; x)$

ist wohldefiniert und stetig diff'bar mit

$v_\tau'(s) = u'(s+\tau; x) = f(u(s+\tau; x)) = f(v_\tau(s)) \quad (\forall s \in I(x) - \tau)$

und mit $v_\tau(0) = u(\tau; x)$ (beachte: $\tau \in I(x) \Rightarrow 0 \in I(x) - \tau$)

Folglich ist v_τ eine Lsg des AWP

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(0) = u(\tau; x). \end{cases}$$

Wäre v_τ echt fortsetzbar, etwa durch eine Lsg $\tilde{v}_\tau : J \to D$, (mit $I(x) - \tau \subsetneq J$)

so wäre

$w_\tau : J + \tau \to D \, ; \quad t \mapsto \tilde{v}_\tau(t - \tau)$ ein C^1-Fkt mit

$w_\tau'(t) = \tilde{v}_\tau'(t-\tau) = f(\tilde{v}_\tau(t-\tau)) = f(w_\tau(t))$ und wegen

$I(x) \subsetneq J + \tau$ und wegen

$\forall t \in I(x) : w_\tau(t) = w_\tau(\underbrace{(t-\tau)}_{\in I(x)-\tau \subseteq J} + \tau) = \tilde{v}_\tau(t-\tau) = v_\tau(t-\tau) = u(t; x)$

eine echte Fortsetzung von $u(\cdot\,; x)$, was nicht sein kann. Da also v_τ nicht fortsetzbar ist, folgt somit (wegen Eindeutigkeit der Lösungen)

$v_\tau = u(\cdot\,; u(\tau; x))$, was $I(u(\tau; x)) = I(x) - \tau$ impliziert.

Somit folgt für alle $t \in I(x)$ und alle $s \in I(u(t; x)) =$

$I(x) - t$: $\quad t + s \in I(x)$ und

$u(t+s; x) = v_t(s) = u(s, u(t; x))$.

zu c)

Seien $x, y \in D$ mit $O(x) \cap O(y) \neq \emptyset$. Dann existieren ein $t \in I(x)$ und ein $s \in I(y)$ mit $u(t; x) = u(s; y)$. Insbesondere gilt

$I(x) - t = I(u(t; x)) = I(u(s; y)) = I(y) - s$.

Damit erhalten wir einerseits

$$\mathcal{O}(x) = \{ u(\tau; x) \mid \tau \in I(x) \}$$

$$= \{ u((\tau - t) + t; x) \mid \tau \in I(x) \}$$

$$= \{ u(\tilde{\tau} + t; x) \mid \tilde{\tau} \in I(x) - t \}$$

$$\underset{a),b)}{=} \{ u(\tilde{\tau}; u(t; x)) \mid \tilde{\tau} \in I(u(t; x)) \}$$

und andererseits

$$\mathcal{O}(y) = \{ u(\sigma; y) \mid \sigma \in I(y) \}$$

$$= \{ u((\sigma - s) + s; y) \mid \sigma \in I(y) \}$$

$$= \{ u(\tilde{\sigma} + s; y) \mid \tilde{\sigma} \in I(y) - s \}$$

$$\underset{a),b)}{=} \{ u(\tilde{\sigma}; u(s; y)) \mid \tilde{\sigma} \in I(u(s; y)) \}$$

$$\underset{u(s;y) = u(t;x)}{=} \{ u(\tilde{\sigma}; u(t; x)) \mid \tilde{\sigma} \in I(u(t; x)) \},$$

also $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$.

<u>Zu d)</u>

Wegen $u(t; x_0) = x_0$ für alle $t \in I(x_0)$, folgt aus $u(t_0; x) = x_0$, dass $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(x_0) \neq \emptyset$ gilt. Dies impliziert laut c) $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$ und daher $u(t; x) = x_0$ für alle $t \in I(x)$.

$\square$

A 10 |

Zunächst bemerken wir ganz allgemein das Folgende:
Für alle $t \in [0, \omega_+(x))$ $(x \in D)$ gilt

$$\begin{aligned}
O^+(u(t;x)) &= \{ u(\tau; u(t;x)) \mid \tau \in [0, \omega_+(u(t;x)))\} \\
&\underset{A9|a)}{=} \{ u(\tau; u(t;x)) \mid 0 \leq \tau < \omega_+(x) - t \} \\
&\underset{A9|b)}{=} \{ u(\tau + t; x) \mid t \leq \tau + t < \omega_+(x) \} \\
&= \{ u(s;x) \mid t \leq s < \omega_+(x) \} \subseteq O^+(x)
\end{aligned}$$

zu a)

Es gelte $\lim\limits_{t \uparrow \omega_+(x)} \| u(t;x) \|_2 = \infty$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^d$ bel.

$\Rightarrow \exists\, t_0 \in [0, \omega_+(x))\ \forall\, t \in [t_0, \omega_+(x)) : \quad \| u(t;x) \|_2 > \| \xi \|_2 + 1$

$\Rightarrow \quad \xi \notin \overline{O^+(u(t_0;x))} \quad \Rightarrow \xi \notin \omega(x)$.

$\underset{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ bel.}}{\Rightarrow} \quad \omega(x) = \emptyset$

Es gelte nun $\neg \left(\lim\limits_{t \uparrow \omega_+(x)} \| u(t;x) \|_2 = \infty \right)$. Dann existiert eine Folge $(t_n)_n$ im $[0, \omega_+(x))$ mit $t_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \omega_+(x)$ derart, dass $(u(t_n;x))_n$ beschränkt ist. Wegen Bolzano-Weierstraß können wir (nach eventuellem Übergang zu einer TF) o.B.d.A. $u(t_n;x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \xi$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^d$ annehmen.

Sind $\tau \leq t$ aus $[0, \omega_+(x))$, so gilt $O^+(u(t;x)) \subseteq O^+(u(\tau;x))$.

Daher folgt wegen $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = \omega_+(x)$

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\overline{O^+(u(t_n;x))}}_{= \overline{\{ u(s;x) \mid t_n \leq s < \omega_+(x) \}} \ni \xi}$$

und somit $\xi \in \omega(x)$, also $\omega(x) \neq \emptyset$.

zu b)

Sei $x \in D$ mit $\omega_+(x) = \infty$. Ferner sei

$$A(x) := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \exists (t_n)_n \in [0,\infty)^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} t_n = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} u(t_n;x) = \xi \right\}$$

Es gilt

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{u(s;x) \mid s \geq t\}}$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u(s;x) \mid s \geq n\}}$$

Ist $\xi \in \omega(x)$, so gilt:

$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists s_n \geq n : \quad \| u(s_n;x) - \xi \|_2 < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \quad s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ und $u(s_n;x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$

$\Rightarrow \quad \xi \in A(x)$. Also: $\omega(x) \subseteq A(x)$.

Sei nun $\xi \in A(x)$ und $(t_n)_n$ wie in der Def. von $A(x)$. Dann gilt

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u(s,x) \mid s \geq t_n\}} \underset{\substack{\text{s.o.} \\ \lim_{n\to\infty} t_n = \infty}}{=} \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{u(s;x) \mid s \geq t\}} = \omega(x)$$

$\Rightarrow \quad A(x) \subseteq \omega(x)$.

Also $A(x) = \omega(x)$

zu c) Sei $x \in D$ mit $\omega_+(x) = \infty$.

Nach der obigen Vorbemerkung gilt

$$\omega(x) = \underbrace{\bigcap_{t\geq 0} \underbrace{\overline{\mathcal{O}^+(u(t;x))}}_{\text{abgeschl.}}}_{\text{abgeschl.}} \subseteq \underbrace{\overline{\mathcal{O}^+(x)}}_{\text{kp}} \subseteq D.$$

Somit ist $\omega(x)$ als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums selbst kompakt und erfüllt $\omega(x) \subseteq D$.

Da $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ kp ist, gilt $\sup_{t\geq 0} \|u(t;x)\|_2 < \infty$. Wie im Beweis zu a) zeigt man nun, dass $\omega(x) \neq \emptyset$ gilt.

Sei nun $y \in \omega(x)$ bel., $t \in I(y)$ und $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus $[0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} u(t_n;x) = y$. O.B.d.A. dürfen wir dann $t_n + t \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Wegen $I(u(t_n;x)) = I(x) - t_n \supseteq [-t_n, \infty)$ bedeutet dies $t \in I(u(t_n;x))$. Ag) 6) liefert somit

$u(t+t_n;x) = u(t;u(t_n;x))$. Nach dem Satz von der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten (betrachte dort $[a,b] = [\min\{0,t\}, \max\{0,t\}]$) gilt

$$\lim_{n\to\infty} u(t;u(t_n;x)) = u(t;y).$$

Daher gilt auch $\lim_{n\to\infty} u(t+t_n;x) = u(t;y)$, woraus wegen $\lim_{n\to\infty}(t+t_n) = \infty$ nun $u(t;y) \in \omega(x)$ folgt. Dies zeigt

$u(t;y) \in \omega(x) \quad \forall t \in I(y)$. Dies wiederum impliziert sowohl

$$G_+ := \{(t, u(t;y)) \mid 0 \leq t < \omega_+(y)\} \subseteq [0, \omega_+(y)) \times \omega(x)$$

also auch

$$G_- := \{(t, u(t;y)) \mid \omega_-(y) < t \leq 0\} \subseteq (\omega_-(y), 0] \times \omega(x).$$

Wäre nun $\omega_+(x) < \infty$ oder $\omega_-(y) > -\infty$, so wäre G_+ bzw. G_- in einer kp Menge enthalten, was nach Satz 2.2 der Vorlesung wegen der **Nicht-Fortsetzbarkeit** von $u(\cdot;y)$ ausgeschlossen ist. Mithin gilt

$I(y) = \mathbb{R}$ und $u(t;y) \in \omega(x)$ für alle $y \in \omega(x)$ und alle $t \in \mathbb{R}$

und somit auch $u(t,\omega(x)) \subseteq \omega(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

A: $\neg \left(\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{dist}(u(t;x), \omega(x)) = 0 \right)$

Dann existiert eine Folge $(t_n)_n$ aus $[0,\infty)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ und $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(u(t_n;x), \omega(x)) > 0$. Nach Bolzano-Weierstraß dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $(u(t_n;x))_{n=1}^{\infty}$ gegen ein $\xi \in \mathbb{R}^d$ konvergiert (vgl. o.: $\sup\limits_{t\geq 0} \|u(t;x)\|_2 < \infty$). Dann gilt $\xi \in \omega(x)$ und wir erhalten

$$0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dist}(u(t_n;x), \omega(x)) \leq \|u(t_m;x) - \xi\|_2 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

woraus durch Grenzübergang $m \to \infty$ ein Widerspruch folgt.
Also: $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{dist}(u(t;x), \omega(x)) = 0$.

Wir nehmen nun abschließend an, $\omega(x)$ sei nicht zhgd. Dann existieren nichtleere, abgeschlossene Mengen $A_1, A_2 \subseteq \omega(x)$ mit $A_1 \dot\cup A_2 = \omega(x)$. Wir betrachten nun die stetigen Fkt'n

$$f_j : [0,\infty) \to [0,\infty)\,;\ t \mapsto \operatorname{dist}(u(t;x), A_j) \qquad (j \in \{1,2\})$$

und bemerken, dass wegen b) $\lim\limits_{t\to\infty} f_j(t) = 0$ gilt. Daher gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n^{(j)} \geq n$ mit $f_j(t_n^{(j)}) < \frac{d}{2}$, wobei $d :=$ $\operatorname{dist}(A_1, A_2) = \inf\{\|a_1 - a_2\|_2 \mid a_j \in A_j\} \underbrace{> 0}_{\text{gilt, da } A_1 \text{ und } A_2 \text{ kp sind.}}$

Nun gilt für jedes $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\operatorname{dist}(\xi, A_1) + \operatorname{dist}(\xi, A_2) \geq \operatorname{dist}(A_1, A_2).$$

und daher auch

$$(*) \quad f_1(t) + f_2(t) \geq d \qquad \forall\, t \in [0,\infty).$$

Sei $I_n := [\min\{t_n^{(1)}, t_n^{(2)}\}, \max\{t_n^{(1)}, t_n^{(2)}\}]$. Wegen $f_1(t_n^{(1)}) < \frac{d}{2}$ und $d \leq f_1(t_n^{(2)}) + f_2(t_n^{(2)}) < f_1(t_n^{(2)}) + \frac{d}{2} \Rightarrow f_1(t_n^{(2)}) > \frac{d}{2}$ liefert der ZWS ein $t_n \in I_n$ mit $f_1(t_n) = d/2$. Wegen $(*)$ gilt dann ebenfalls $f_2(t_n) \geq d/2$. Nach Übergang zu einer TF dürfen wir $u(t_n; x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^d$ annehmen. Wegen $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ (beachte: $t_n \geq \min\{t_n^{(1)}, t_n^{(2)}\} \geq n$) gilt also $\xi \in \omega(x)$ und daher $\operatorname{dist}(\xi, A_j) = 0$ für ein $j \in \{1, 2\}$ (da ja $A_1 \cup A_2 = \omega(x)$). Wir erhalten jedoch

$$0 < \frac{d}{2} \leq f_j(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{dist}(\xi, A_j) \quad \text{für } j \in \{1, 2\}$$

und somit $0 < \operatorname{dist}(\xi, A_j)$ für $j \in \{1, 2\}$ Widerspruch! Also muss $\omega(x)$ zhgd sein $\square$

A 11

zu a)

IA: x ist nicht monoton. Dann gibt es Stellen $t_1, t_2 \in I$ mit $x'(t_1)\, x'(t_2) < 0$. Wir setzen nun

$$s_2 := \min\{ t \in [t_1, t_2] \mid x(t) = x(t_2)\}.$$

Wegen

$$g(x(s_2)) = g(x(t_2)) = x'(t_2) \neq x'(t_1) = g(x(t_1))$$

gilt $s_2 > t_1$. Sei ferner

$$s_1 := \max\{ t \in [t_1, s_2] \mid x(t) = x(t_1)\}.$$

Wegen

$$g(x(s_1)) = g(x(t_1)) = x'(t_1) \neq x'(t_2) = g(x(t_2)) = g(x(s_2))$$

ist $s_1 < s_2$. Für alle $s \in (s_1, s_2)$ gilt $x(s) \notin \{x(s_1), x(s_2)\}$.
Nun sind vier Fälle zu unterscheiden:

$$\left\{\begin{matrix} x(s_1) > x(s_2) \\ \text{oder} \\ x(s_1) < x(s_2) \end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix} x'(s_1) < 0 < x'(s_2) \\ \text{oder} \\ x'(s_1) > 0 > x'(s_2) \end{matrix}\right\}$$

(beachte: $g(x(s_1)) = x'(s_1) \neq x'(s_2) = g(x(s_2))$ impliziert $x(s_1) \neq x(s_2)$)

Diese werden alle ähnlich behandelt. Wir behandeln daher exemplarisch den Fall $x(s_1) > x(s_2)$ und $x'(s_1) < 0 < x'(s_2)$.
Wähle $s_0 \in [s_1, s_2]$ mit $x(s_0) = \min\{x(s) \mid s_1 \leq s \leq s_2\}$.
Wegen $x'(s_2) > 0$ und der Stetigkeit von x' existiert ein $r > 0$ mit $x'(t) > 0 \;\; \forall\, t \in [s_2 - r, s_2] \subseteq [s_1, s_2]$. Insbesondere ist x auf $[s_2 - r, s_2]$ streng monoton wachsend, was $x(s_0) < x(s_2) < x(s_1)$ und daher auch $s_0 \in (s_1, s_2)$ impliziert. Der ZWS liefert nun ein $\sigma \in (s_1, s_0)$ mit $x(\sigma) = x(s_2)$ im Widerspruch zu $x(s) \notin \{x(s_1), x(s_2)\}$ für alle $s \in (s_1, s_2)$ (s.o.). Also ist x doch monoton wachsend.

zu b)

Es genügt, zu zeigen: Ist x nicht injektiv, so ist x konstant.
Sei also x nicht injektiv und $t_1 < t_2$ aus I mit $x(t_1) = x(t_2)$.
Wegen der Monotonie von x gilt $x(t) = x(t_1) \;\; \forall\, t \in [t_1, t_2]$ und daher auch $x'(t) = 0 \;\; \forall\, t \in (t_1, t_2) \underset{x' \text{ stetig}}{\Longrightarrow} g(x(t_1)) = x'(t_1) = 0$. Das AWP

$$\left\{\begin{aligned} y'(t) &= g(y(t)) \\ y(t_1) &= x(t_1) \end{aligned}\right.$$

wird somit sowohl durch die Fkt x als auch durch die Fkt $\tilde{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; t \mapsto x(t_1)$ gelöst. Offenkundig ist diese Lsg $\tilde{x}$ nicht

fortsetzbar. Eindeutigkeit der Lsg liefert daher
$\tilde{x}|_I = x$, d.h., x ist konstant.

<u>Zu c)</u>

Offenkundig ist 0 eine Lösung.

<u>Beh</u>: Es gibt keine weiteren Lösungen.

<u>Beweis</u>: Sei $x: I \to \mathbb{R}$ eine von 0 verschiedene Lösung.
$\Rightarrow \exists\, t_1 \in I\setminus\{0\}: x(t_1) \neq 0$. Nach dem ZWS nimmt x auf $[\min\{0,t_1\}, \max\{0,t_1\}]$ alle Werte zwischen 0 und $x(t_1) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ an. Da g auf $[\min\{0, x(t_1)\}, \max\{0, x(t_1)\}]$ unendlich oft < 0 und unendlich oft > 0 ist, ist x wegen $x'(t) = g(x(t))\ \forall t \in I$ weder monoton fallend noch monoton steigend im Widerspruch zu Teil a).

<u>Zu d)</u>

Sei $x: I \to D$ die nicht fortsetzbare Lsg des gegebenen AWP und sei x zudem nicht injektiv, d.h., $\exists\ t_1 < t_2$ in I: $x(t_1) = x(t_2)$. Mit der Notation von Aufgabe 9) gilt dann

$$\begin{aligned} I(x(t_1)) &= I(x(t_2)) = I(\mu(t_2, x_0)) = I(x_0) - t_2 = I - t_2 \\ &\parallel \\ I(\mu(t_1; x_0)) &= I(x_0) - t_1 = I - t_1 \end{aligned}$$

und somit $I = I + t_2 - t_1$, was bereits $I = \mathbb{R}$ impliziert.
Für alle $t \in I = \mathbb{R}$ folgt nun mit A9) und mit $\alpha := t_2 - t_1 > 0$:

$$\begin{aligned} x(t+\alpha) &= \mu(t - t_1 + t_2; x_0) = \mu(t - t_1; \underbrace{\mu(t_2; x_0)}_{= x(t_2) = x(t_1) = \mu(t_1; x_0)}) \\ &= \mu(t - t_1; \mu(t_1; x_0)) = \mu(t - t_1 + t_1; x_0) \\ &= \mu(t; x_0) = x(t). \end{aligned}$$

Mithin ist x periodisch. $\square$

A 121

Um A9) nutzbar zu machen, setzen wir g vermöge $g(x) := g(0)$ für $x < 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Offenkundig ist g dann nach Def. bzw. Vorauss. lokal Lipschitz-stetig auf $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Sei nun $r > 0$ derart, dass $g|_{[0,r)}$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante L (so ein r existiert nach Voraussetzung). Seien ferner $x, y \in (-\infty, r)$. Dann gilt:

$$x, y \leq 0 \Rightarrow |g(x) - g(y)| = |g(0) - g(0)| = 0 \leq L|x-y|$$

$$x, y \in [0, r) \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq L|x-y| \quad \text{(Wahl von } r\text{)}$$

$$x < 0 < y \Rightarrow |g(x) - g(y)| = |g(0) - g(y)| \leq L|0-y| \underset{x<0\leq y}{\leq} L|x-y|$$

Also ist $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig und daher auch die Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x\,g(x)$. Insbesondere ist jede Lsg von (2) Restriktion⊛ einer maximalen Lsg $\tilde{u}$ von

$$(2') \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

⊛ Es gilt nämlich $u = \tilde{u}$ für $x_0 \geq 0$ (s.u.)

Zu a)

Da $0, x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ Nullstellen von f sind, folgt a) aus dem nachstehenden allg. Resultat:

Ist x_∞ ein Equilibrium von (2') und gilt $x_0 \gtrless x_\infty$, so gilt $\tilde{u}(t) \gtrless x_\infty$ für alle $t \in (\omega_-, \omega_+)$.

Beweis: Wäre die Beh. falsch, so gäbe es ein $t_1 \in (\omega_-, \omega_+)$ mit $\tilde{u}(t_1) \lesseqgtr x_\infty$, was wegen $\tilde{u}(0) = x_0 \gtrless x_\infty$ mit Hilfe des ZWS die Existenz eines $t_2 \in (\omega_-, \omega_+)$ mit $\tilde{u}(t) = x_\infty$ impliziert

$\underset{\text{9) d)}}{\Rightarrow}$ $\tilde{u}(t) = x_\infty \ \forall t \in (\omega_-, \omega_+) \underset{t=0}{\Rightarrow} x_0 = x_\infty$ ↯ □

Zu b)

In (i) und (iii) ist u offenkundig beschränkt und kann $[0, \infty)$ niemals verlassen. Nach A6) gilt daher $\omega_+ = \infty$. Auch in (ii) kann u die Menge $[x_{2m}, \infty) \subseteq [0, \infty)$ nicht verlassen. Zudem ist u in (ii) wegen $g \leq 0$ auf $[x_{2m}, \infty)$ monoton fallend und es gilt daher

$x_{2m} \leq u(t) \leq u(0) = x_0$ für alle $t \in (0, \omega_+)$ und somit auch $\omega_+ = \infty$.

zu c) - e)

Es gilt $0 < u(t) < x_1$ für alle $t \in [0,\infty)$ und wegen $g < 0$ auf $(0, x_1)$ ist u auf $[0,\infty)$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ der GW $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ existiert in $[0, x_1]$ und erfüllt wegen des streng monotonen Fallens $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) < x_1$. Nach Satz 2.7 der Vorlesung gilt $f(\lim\limits_{t\to\infty} u(t)) = f(\lim\limits_{t\to\infty} \tilde{u}(t)) = 0$.
Auf $[0, x_1]$ sind aber 0 und x_1 die einzigen NS'en von f.
$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$.

Die Teile d) und e) beweist man nun analog. Exemplarisch führen wir noch den Beweis zu e) aus:

Gilt $x_0 = x_{2k}$, so folgt $u(t) = x_{2k} \xrightarrow[t\to\infty]{} x_{2k}$.

Gilt $x_{2k-1} < x_0 < x_{2k}$, so gilt $u(t) \in (x_{2k-1}, x_{2k})$ $\forall t \geq 0$.
Wegen $g > 0$ auf (x_{2k-1}, x_{2k}) wächst u streng monoton
$\Rightarrow$ der GW $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ existiert in $(x_{2k-1}, x_{2k}]$

$\underset{2.7}{\Rightarrow} f(\lim\limits_{t\to\infty} u(t)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} u(t) = x_{2k}$

Gilt $x_{2k} < x_0 < x_{2k+1}$, so gilt $u(t) \in (x_{2k}, x_{2k+1})$ $\forall t \geq 0$
Wegen $g < 0$ auf (x_{2k}, x_{2k+1}) fällt u streng monoton
$\Rightarrow$ der GW $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ existiert in $[x_{2k}, x_{2k+1})$

$\underset{2.7}{\Rightarrow} f(\lim\limits_{t\to\infty} u(t)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} u(t) = x_{2k}$

(*) Genauer: Für $x_0 = 0$ ist $\tilde{u} = 0$ und $u = 0$. Ist $x_0 > 0$, so folgt wegen A9 1(d) und wegen der Tatsache, dass 0 ein Equilibrium ist, schon $\tilde{u}(t) > 0$ für alle $t \in (\tilde{\omega}_-, \tilde{\omega}_+)$, wobei $(\tilde{\omega}_-, \tilde{\omega}_+)$ das maximale Existenzintervall von $\tilde{u}$ ist. Insbesondere gilt $\lim\limits_{t\to\tilde{\omega}_\pm} \tilde{u}(t) \geq 0$. Ist nun $\omega_\pm$ endlich, so gilt $\lim\limits_{t\to\omega_\pm} \tilde{u}(t) = \infty$.
Da $\tilde{u}$ die Menge $[0,\infty)$ nie verlässt, aber $\lim\limits_{t\to\omega_\pm} \tilde{u}(t) = \infty$ für endliches $\omega_\pm$ erfüllt, ist $\tilde{u}$ nicht fortsetzbare Lsg zu (2) und es folgt $u \equiv \tilde{u}$.