KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
23.05.2013

6. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Freitag, den 31.05.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 21

Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $n \in \mathbb{N}$ und es seien $a_0, \ldots, a_{n-1}, r \in \mathrm{C}([a,b])$ stetige Funktionen. Ferner seien $\alpha_{kl}, \beta_{kl}, \gamma_k \in \mathbb{R}$, wobei $k, l \in \{0, \ldots, n-1\}$. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} (Su)(t) = r(t), & a \le t \le b, \\ R_k u = \gamma_k, & k \in \{0, \ldots, n-1\}, \end{cases} \tag{1}$$

wobei

$$(Su)(t) := u^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) u^{(j)}(t)$$

und

$$R_k u := \sum_{l=0}^{n-1} \left(\alpha_{kl} u^{(l)}(a) + \beta_{kl} u^{(l)}(b) \right)$$

für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

a) Das System (1) ist für alle $r \in \mathrm{C}([a,b])$ und alle $(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ lösbar.

b) Das System (1) ist für alle $r \in \mathrm{C}([a,b])$ und alle $(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

c) Das System (1) besitzt für $r \equiv 0$ und $\gamma_0 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$ nur die triviale Lösung.

d) Ist $u_0, \ldots, u_{n-1}$ ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $Su = 0$, so ist die Matrix $A := (R_k u_l)_{k,l \in \{0,\ldots,n-1\}}$ invertierbar.

Aufgabe 22 (K)

Es sei $T > 0$. Bestimmen Sie alle $\omega \in \mathbb{R}$, für welche das Randwertproblem (mit periodischen Randbedingungen)

$$\begin{cases} u''(t) + \omega^2 u(t) = f(t), & 0 \le t \le T, \\ u(0) = u(T),\ u'(0) = u'(T), \end{cases} \tag{2}$$

für alle stetigen und T-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.

– bitte wenden –

Aufgabe 23 (K)

Lösen Sie die folgenden Randwertaufgaben.

a)

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) + u'(0) = 1,\ u(1) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} u'''(t) - u'(t) = t - 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) + u'(0) = 2u''(0) + u'(1) = u(0) - u''(1) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 24

Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $p \in \mathrm{C}^1([a,b])$ mit $p > 0$ und $q, r \in \mathrm{C}([a,b])$. Schließlich sei u_0 eine nichttriviale Lösung des homogenen Dirichlet-Randwertproblems

$$\begin{cases} (pu')'(t) + q(t)u(t) = 0, & a \leq t \leq b, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

a) Es gilt $\int_a^b u_0(t)r(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) Das inhomogene Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{cases} (pu')'(t) + q(t)u(t) = r(t), & a \leq t \leq b, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

ist lösbar.