KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
29.05.2013

7. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Freitag, den 06.06.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 25 (K)

a) Wir betrachten das Randwertproblem

$$(1) \qquad \begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & 0 \le t \le 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

mit einem $\lambda > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass (1) genau dann eindeutig lösbar ist, wenn $\lambda \notin \{n^2\pi^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt ist.

(ii) Bestimmen Sie für $\lambda \notin \{n^2\pi^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ die zu (1) zugehörige Greensche Funktion.

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion zu der Randwertaufgabe

$$(2) \qquad \begin{cases} tu''(t) + u'(t) = 0, & 1 \le t \le e, \\ u(1) = u(e) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 26

Es sei $a > 0$ und $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bezüglich der zweiten Variablen global Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Beweisen Sie die nachfolgenden Aussagen.

a) Gilt $L \in (0, a)$, so besitzt das (nichtlineare) von-Neumann-Randwertproblem

$$(3) \qquad \begin{cases} u''(t) - au(t) = f(t, u(t)), & 0 \le t \le 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

genau eine Lösung.

b) Ist $L \ge a$, so braucht (3) nicht eindeutig lösbar zu sein.

Aufgabe 27 (K)

Untersuchen Sie das folgende (nichtlineare) Dirichlet-Randwertproblem im Hinblick auf seine Lösbarkeit.

$$(4) \qquad \begin{cases} u''(t) = \arctan\left(\frac{u(t)}{1+t^2}\right), & \pi \le t \le 2\pi, \\ u(\pi) = u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

– bitte wenden –

Aufgabe 28

Es sei $c > 0$, $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$ und $f \in \mathrm{C}(\Omega)$ eine bezüglich der ersten Variablen stetig differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass die eindimensionale inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = 0 = u_t(x,0), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5}$$

nur durch die Funktion

$$u(x,t) := \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\tau \qquad ((x,t) \in \Omega)$$

gelöst wird.

Informationen zur Modulprüfung

Prüfungen:

Die Modulprüfung zur 2-stündigen Vorlesung "Differentialgleichungen" findet statt am

6. August 2013 von 10-11 Uhr im Tulla HS

Die Modulprüfung zur 4-stündigen Vorlesung "Differentialgleichungen und Hilberträume" findet statt am

6. August 2013 von 10-12 Uhr im HS 37

Anmeldungen:

- Studierende der **Mathematik** melden sich über über QUISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) an (die Prüfung zur 2-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 265, die Prüfung zur 4-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 136).
- Studierende der **Physik** melden sich bei Frau S. Fuchs (Zimmer 3A 05.1, Allianzgebäude) an. **Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Studienbüro mitzubringen!**

Anmeldeschluss: 31.07.2013