KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

SS 2013
06.06.2013

8. Übungsblatt

Differentialgleichungen und Hilberträume

Abgabe: bis Donnerstag, den 13.06.2013, 14:00 Uhr

Aufgabe 29 (K)

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt, d.h., es gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass dann vermöge

$$(x|y) := \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right), & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{cases}$$

ein Skalarprodukt auf X definiert wird mit $\sqrt{(x|x)} = \|x\|$ für alle $x \in X$.

Bemerkung: Diese Formel für das Skalarprodukt bezeichnet man auch als *Polarisierungsidentität.* Insbesondere zeigt diese Aufgabe kombiniert mit Satz 7.2 aus der Vorlesung den sog. *Satz von Jordan-von Neumann*, dass nämlich die Innenprodukträume unter den normierten Räumen durch das Bestehen der Parallelogrammgleichung charakterisiert werden.

Aufgabe 30

Es sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ und $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Wir betrachten nun die Menge

$$\mathrm{C}_b(X,E) := \left\{ f \in E^X;\ f \text{ ist stetig mit } \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty \right\}$$

sowie die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty : \mathrm{C}_b(X,E) \to [0,\infty);\ f \mapsto \|f\|_\infty.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) $(\mathrm{C}_b(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

b) Die Norm $\|\cdot\|_\infty$ wird genau dann von einem Skalarprodukt induziert, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- **(i)** Es gilt $E = \{0\}$.
- **(ii)** Der Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist ein Hilbertraum und X ist einelementig.

Aufgabe 31 (K)

Verifizieren Sie die nachfolgenden Behauptungen.

a) Für alle $1 \le p < r \le \infty$ gilt $\ell^p \subsetneqq \ell^r$ mit $\|(x_n)_n\|_r \le \|(x_n)_n\|_p$.

b) Es sei $c_0 := \{(x_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Dann gilt $\bigcup_{1 \le p < \infty} \ell^p \subsetneqq c_0$.

c) Es sei $1 < r \le \infty$ und $(x_n)_n \in \ell^{p_0}$ für ein $p_0 \in [1, r)$. Dann gilt $\lim_{p \to r} \|(x_n)_n\|_p = \|(x_n)_n\|_r$.

– bitte wenden –

Aufgabe 32

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und nichtleer und $K := \overline{\Omega}$. Ferner sei $w \in \mathrm{C}(K)$. Wir betrachten auf $\mathrm{C}(K)$ die Sesquilinearform

$$(\cdot|\cdot)_w : \mathrm{C}(K) \times \mathrm{C}(K) \to \mathbb{K};\ (f,g) \mapsto \int_K f(x)\overline{g(x)}w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweisen Sie die nachstehenden Aussagen.

a) Genau dann definiert $(\cdot|\cdot)_w$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{C}(K)$, wenn $w(x) \in [0,\infty)$ für alle $x \in K$ gilt und zudem $\mathrm{int}(\{x \in K;\ w(x) = 0\}) = \emptyset$ erfüllt ist.

b) Ist $(\cdot|\cdot)_w$ ein Skalarprodukt mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|_w$, so ist $\|\cdot\|_w$ zur üblichen Norm $\|\cdot\|_2$ genau dann äquivalent, wenn $w(x) \in (0,\infty)$ für alle $x \in K$ gilt.

Bonusaufgabe

Es seien $c > 0$, $L > 0$, $\Omega := [0,L] \times [0,\infty)$, $u_0 \in \mathrm{C}^2([0,L])$ mit $u_0(0) = u_0(L) = 0 = u_0''(0) = u_0''(L)$ und $u_1 \in \mathrm{C}^1([0,L])$ mit $u_1(0) = u_1(L) = 0$. Wir betrachten das Anfangs-Randwertproblem

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in \Omega, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,L], \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in [0,L]. \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Erfüllt u auf Ω die partielle Differentialgleichung $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$, so ist die Abbildung

$$E : [0,\infty) \to \mathbb{R};\ t \mapsto \int_0^L u_t^2(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_0^L c^2 u_x^2(x,t)\,\mathrm{d}x$$

konstant.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass (1) genau eine Lösung besitzt.

Informationen zur Modulprüfung

Prüfungen:

Die Modulprüfung zur 2-stündigen Vorlesung "Differentialgleichungen" findet statt am

6. August 2013 von 10-11 Uhr im Tulla HS

Die Modulprüfung zur 4-stündigen Vorlesung "Differentialgleichungen und Hilberträume" findet statt am

6. August 2013 von 10-12 Uhr im HS 37

Anmeldungen:

- Studierende der **Mathematik** melden sich über über QUISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) an (die Prüfung zur 2-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 265, die Prüfung zur 4-stündigen Vorlesung hat die Prüfungsnr. 136).
- Studierende der **Physik** melden sich bei Frau S. Fuchs (Zimmer 3A 05.1, Allianzgebäude) an. **Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Studienbüro mitzubringen!**

Anmeldeschluss: 31.07.2013