KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann SS 2013

Differentialgleichungen und Hilberträume

Klausurcheckliste

Grundsätzlich sollen Sie ***alle Definitionen*** und ***alle wichtigen Sätze*** der Vorlesung ***kennen***. Darüber hinaus verdienen die nachfolgend aufgelisteten Punkte besondere Beachtung. Sie sollten – auch (aber gewiss *nicht* ausschließlich!) im Hinblick auf Ihre Klausurteilnahme – mit den folgenden Stichworten, die den Inhalt der Vorlesung widerspiegeln, etwas anfangen können. In Klammern sind (soweit vorhanden) Aufgaben angegeben, die sich mit der jeweiligen Thematik befassen und dabei den entsprechenden Stoff der Vorlesung vertiefen oder erweitern oder Anwendungen für Techniken und Sätze, welche aus der Vorlesung in diesem Zusammenhang bekannt sind, bereitstellen.

zuletzt aktualisiert am 23. Juli 2013

Teil I: Differentialgleichungen

- Eigenschaften endlichdimensionaler normierter Räume
  - Äquivalenz aller Normen auf dem $\mathbb{K}^n$
  - jede Norm auf einem endlichdimensionalen Raum ist vollständig (Aufgabe 1)
  - endlichdimensionale normierte Räume sind unter allen normierten Räumen durch die Gültigkeit des Satzes von Bolzano-Weierstraß charakterisiert (Aufgabe 2 b))
- Matrixexponential (Aufgabe 4 d))
- Satz von Picard-Lindelöf
- stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten (kam in verschiedenen Aufgaben als Hilfsmittel zum Einsatz)
- maximale linke/rechte Existenzzeit, maximales (linkes/rechtes) Existenzintervall, maximale nichtfortsetzbare Lösung (Aufgabe 5, 6, 7, 8); insbesondere:
  - Charakterisierung der maximalen Existenzzeiten (Satz 2.2) (Aufgabe 6, kam zudem in mehreren späteren Aufgaben zum Einsatz)
  - Kriterium für globale Existenz (Satz 2.4); in diesem Zusammenhang: Lemma von Gronwall
- Fundamentale Eigenschaften der Lösungen autonomer Differentialgleichungen bei lokal Lipschitz-stetiger rechter Seite:

- Grenzwerte für $t \to \infty$ sind stationäre Punkte (angewendet in Aufgabe 12, 14)
- Halbgruppeneigenschaft/Erzeugung lokaler Halbflüsse (Aufgabe 9 a), b))
- Bahnen unterschiedlicher Lösungen können einander nicht schneiden (Aufgabe 9 c), angewendet in Aufgabe 11, 12, 14)
- Lösungen eindimensionaler Gleichungen sind entweder streng monoton oder konstant (Aufgabe 11 b), angewendet in Aufgabe 14)
- Nicht injektive Lösungen existieren global und sind periodisch (Aufgabe 11 d))

- Stabilitätsuntersuchung autonomer Differentialgleichungen
  - skalare Gleichungen/eindimensionale Systeme (Aufgabe 12, 14, 15 b), c) (Anwendung von Aufgabe 14))
  - Berechnung erster Integrale (Aufgabe 13)
  - Anwendung des Prinzips der linearisierten Stabilität (Satz 4.2, 4.3) (Aufgabe 18, 20 c))
  - Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe von Lyapunov-Funktionen (Aufgabe 19), weitere Anwendungen von Lyapunov-Funktionen (Aufgabe 17)
  - Stabilitätsuntersuchungen auf der Grundlage der Definition von (asymptotischer) Stabilität (Aufgabe 15 a), 16)
- Theorie der Randwertprobleme, insbesondere
  - Alternativsatz (Satz 5.2) (Aufgabe 21, 25 a) (i), indirekt in Aufgabe 22)
  - Berechnung von Lösungen homogener linearer Randwertprobleme (Aufgabe 22, 23)
  - Berechnung Greenscher Funktionen (Aufgabe 25 a) (ii), b), indirekt auch in Aufgabe 26) und ihr Bezug zu inhomogenen Randwertproblemen (Aufgabe 26)
  - Satz von Lettenmeyer (Aufgabe 27)
- Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ((Aufgabe 28, Bonusaufgabe auf Blatt 8))

Teil II: Hilberträume

1. Elementare Grundlagen der Hilbertraumtheorie

- Beispiele für Hilberträume und Nicht-Hilberträume (Aufgabe 30 b), 32)
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung (kam an verschiedenen Stellen zum Einsatz)
- Satz von Jordan-von Neumann (Aufgabe 29) und Anwendungen (z.B. Aufgabe 30 b))
- elementarste Eigenschaften der ℓ^p- und L^p-Räume (z.B. Vollständigkeit, i. Allg. nur für $p = 2$ ein Hilbertraum, Hölder-Ungleichung (kam an verschiedenen Stellen zum Einsatz), gegenseitige Lage (Aufgabe 31))
- elementare Grundzüge der Theorie linearer Operatoren
  - Beispiele stetiger und unstetiger Operatoren (Aufgabe 34, 35, 36)
  - Charakterisierung stetiger linearer Operatoren (Satz 8.1), Berechnung der Operatornorm (Aufgabe 4 c), 34, 35, 36)
  - Eigenschaften der Operatornorm (Aufgabe 4 a), 33)
- Themenfeld Orthogonalität
  - Begriff des orthogonalen Komplements (Aufgabe 38, 41 g), im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 39 a) und 49 c))
  - Satz 9.3, orthogonale Projektionen (elementare Eigenschaften (Aufgabe 37), (Zusammenhang zu) Bestapproximationen (Bonusaufgabe Blatt 9)); (orthogonale Projektionen traten außerdem (z.T. als Hilfsmittel im Lösungsvorschlag) etwa in Aufgabe 39 a), 49 c), 50 e), i) auf)
  - Projektionssatz (Satz 9.4 und Folgerung 9.5) (z.B. Aufgabe 38, 39 a))
  - Orthonormalsysteme (Bonusaufgabe auf Blatt 10, Aufgabe 40, Bonusaufgabe auf Blatt 11, Aufgabe 49, 50)
    * Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren (Aufgabe 40)
    * Bessel'sche Ungleichung
    * Charakterisierung des Bestehens der Parseval'schen Gleichung, Begriff des vollständigen Orthonormalsystems, Begriff der Orthonormalbasis (Aufgabe 40 (siehe Beweisalternative im Lösungsvorschlag), Teil d) der Bonusaufgabe auf Blatt 11, Aufgabe 49, 50)
    * Charakterisierung separabler Hilberträume über die Existenz einer abzälbaren Orthonormalbasis (Teil b) der Bonusaufgabe auf Blatt 10, Aufgabe 40 (siehe Beweisalternative im Lösungsvorschlag))
    * Satz von Riesz-Fischer (Aufgabe 40 (siehe Beweisalternative im Lösungsvorschlag))
- stetige lineare Funktionale auf Hilberträumen

- Darstellungssatz von Riesz für den Dualraum eines Hilbertraumes (Aufgabe 42, Teil b) der Bonusaufgabe auf Blatt 11, Ausgangspunkt für Aufgabe 41)
- Satz von Lax-Milgram (Aufgabe 42, Bonusaufgabe auf Blatt 12)

2. Elementarste Grundlagen der Theorie der Soboleväume

- Begriff der schwachen Ableitung
  - Definition und Eindeutigkeit der schwachen Ableitung
  - Beziehung der schwachen Ableitung zur klassischen Ableitung (Aufgabe 43)
  - Beispiele für schwach differenzierbare Funktionen, die jedoch nicht im klassischen Sinne differenzierbar sind, und für Funktionen, die nicht schwach differenzierbar sind (Aufgabe 44)
- Definition und elementare Eigenschaften der Räume $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ (Hilbertäume, Poincaré-Friedrichs-Ungleichung (Aufgabe 45, im Lösungsvorschlag zur Bonusaufgabe auf Blatt 12 angewendet))
- Lösung der schwachen Formulierung des Dirichlet-Randwertproblems für die Poissongleichung (Bonusaufgabe auf Blatt 12)

3. Kompakte und symmetrische Operatoren

- Definition kompakter Operatoren, elementare Eigenschaften und Beispiele kompakter Operatoren (Aufgabe 47, 48; siehe auch Zusatzmaterial)
- Definition symmetrischer Operatoren, elementare Eigenschaften (z.B. Satz 13.2) (Aufgabe 46 c)) und Beispiele symmetrischer Operatoren
- spektrale Eigenschaften und Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren (Sätze 13.3-13.8) (Aufgabe 49, 50, 51)
- Anwendung des Spektralsatzes für kompakte symmetrische Operatoren zur Lösung symmetrischer Randwertprobleme (Satz 14.3 mit Beweis) (*nicht mehr für die Klausur relevant*)
- Anwendung der Theorie symmetrischer Randwertprobleme zusammen mit dem Separationsansatz zum Auffinden von Lösungskandidaten für Anfangs-Randwertprobleme (*nicht mehr für die Klausur relevant*)