AUFFINDEN ERSTER INTEGRALE

ZUSAMMENFASSUNG. In dieser kleinen Note widmen wir uns in einem für uns ausreichendem Maße den theoretischen Grundlagen zum Auffinden erster Integrale.

1. Die Problemstellung

Wir betrachten eine autonome Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$, wobei hier und im Folgenden $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen ist ($d \in \mathbb{N}$). Ein erstes Integral zu dieser Differentialgleichung ist laut Vorlesung eine Funktion $H \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, welche

$$((\nabla H)(x)|f(x)) = 0$$

für alle $x \in D$ erfüllt, wobei $(\cdot|\cdot)$ wie üblich das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.

Ist jetzt H ein solches erstes Integral, so gilt für jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}^d$ von (1), dass die Funktion $H \circ x$ konstant ist (Satz 3.1 der Vorlesung). Lösungen verlaufen also in den Niveaulinien der Funktion H. Daher kann die Existenz eines *nichtkonstanten*[1] ersten Integrals wichtige Informationen zur Struktur der Lösungen liefern (siehe z.B. den Beweis zu Satz 3.2 der Vorlesung).

Daher stellt sich nun die Frage, wie man überhaupt erste Integrale finden kann.

2. Ein Ansatz im Fall $d = 2$

Wir wollen den Spezialfall $d = 2$ und $f = (g, h)$ betrachten. Hier bietet sich folgender simpler Ansatz zum Auffinden eines ersten Integrals an:

Finde ein $H \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ und eine geeignete Funktion $\lambda : D \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$(\nabla H)(x, y) = \lambda(x, y) \cdot (-h(x, y), g(x, y)) \tag{2}$$

für alle $x \in D$ gilt. Denn dann erhält man nämlich

$$\begin{aligned}(\nabla H(x, y)|f(x, y)) &= \Big(\lambda(x, y) \cdot (-h(x, y), g(x, y))\Big|(g(x, y), h(x, y))\Big) \\ &= \lambda(x, y) \cdot (-h(x, y)g(x, y) + g(x, y)h(x, y)) = 0\end{aligned}$$

für alle $x \in D$. Darüber hinaus liefert dieser Ansatz, falls er erfolgreich ist und wenigstens eine der beiden Funktionen λh oder λg von der Nullfunktion verschieden ist, automatisch ein nichtkonstantes H.

[1] Eine konstante Funktion ist nach unserer Definition immer ein erstes Integral.

Wir nehmen nun noch zusätzlich an, dass sowohl λg als auch λh stetig partiell differenzierbar ist. Dann liefert der Satz von H. A. Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda h) = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g).$$

Unter der Voraussetzung, dass λg und λh beide stetig partiell differenzierbar sind, ist somit das Bestehen der sog. *Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda h) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g). \tag{3}$$

eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Funktion H, welche der Gleichung (2) genügt.

Damit stehen wir an dieser Stelle nun zwei Fragen gegenüber.

(a) Ist (3) auch eine hinreichende Bedingung?
(b) Wie findet man ein solches H, wenn man schon weiß, dass es existiert?

Ohne größeren Mehraufwand können wir beide Fragen in einem größeren Zusammenhang behandeln.

3. Zur Existenz von Potentialfunktionen im $\mathbb{R}^d$

Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ offen und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : D \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion. Eine Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ heißt *Potentialfunktion* oder *Stammfunktion zu* φ, falls Φ auf D partiell differenzierbar ist und $\nabla\Phi = \varphi$ auf D erfüllt. In diesem Falle nennt man φ ein *Gradientenfeld*. Man beachte, dass sich zwei Potentialfunktionen desgleichen Gradientenfeldes auf einer Zusammenhangskomponente von D nur um eine additive Konstante unterscheiden.

Im Falle $d = 1$ ergibt sich der klassische Begriff einer Stammfunktion. Allerdings weist der mehrdimensionale Fall ganz erhebliche Unterschiede zum eindimensionalen Fall auf. Im letzt genannten Fall wissen wir etwa, dass stetige Funktionen immer eine Stammfunktion besitzten, wohingegen dies für $d \geq 2$ im Allgemeinen nicht mehr korrekt ist. Das folgende Lemma zeigt eine erste Obstruktion für die Existenz einer Potentialfunktion.

3.1. **Lemma.** *Ist φ ein stetiges Gradientenfeld mit Potentialfunktion Φ, so gilt*

$$\int_\gamma \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\varphi(\gamma(t))|\gamma'(t))\,\mathrm{d}t = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a))$$

für jeden stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to D$. Insbesondere gilt $\int_\gamma \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, falls γ geschlossen ist, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ erfüllt ist.

Beweis. Wir setzen voraus, dass γ stetig differenzierbar ist (den allgemeinen Fall führt man leicht hierauf zurück). Da φ stetig ist, ist Φ somit stetig partiell differenzierbar. Nach der Kettenregel ist die Abbildung

$$\Phi \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R};\ t \mapsto \Phi(\gamma(t))$$

stetig differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}(\Phi \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}(t) = ((\nabla\Phi)(\gamma(t))|\gamma'(t)) = (\varphi(\gamma(t))|\gamma'(t))$$

für alle $t \in [a, b]$, woraus

$$\Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}(\Phi \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\varphi(\gamma(t))|\gamma'(t))\ \mathrm{d}t = \int_\gamma \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

wie behauptet folgt. □

Lemma 3.1 zeigt also, dass für ein stetiges Gradientenfeld φ und einen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to D$ das Wegintegral $\int_\gamma \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ nur von den Endpunkten des Weges γ abhängt, nicht jedoch von der konkreten Gestalt des Weges γ.

3.2. **Beispiel.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2;\ (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$$

sowie den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\};\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\gamma \varphi(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \big((-\sin(t), \cos(t))\big|(-\sin(t), \cos(t))\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0.\end{aligned}$$

Folglich kann φ kein Gradientenfeld sein. Damit haben wir ein Beispiel für eine stetige Funktion (zweier Veränderlicher), die keine Stammfunktion besitzt.

In Verallgemeinerung unserer Überlegungen aus dem zweiten Abschnitt erhalten wir die folgende notwendige Bedingung für die Existenz einer Potentialfunktion.

3.3. **Lemma.** *Es sei φ ein stetig differenzierbares Gradientenfeld mit Potentialfunktion Φ. Dann gilt*

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, d\}$. Man bezeichnet diese Bedingungen zusammenfassend als Integrabilitätsbedingung.

Beweis. Nach Voraussetzung ist Φ nun zweimal stetig partiell differenzierbar. Der Satz von H. A. Schwarz liefert daher

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, d\}$. □

Es liegt nun nahe, zu fragen, ob die in den Lemmata 3.1 und 3.3 gefundenen notwendigen Kriterien auch hinreichend für die Existenz einer Potentialfunktion sind.

Für das Kriterium aus Lemma 3.1 ist dies in der Tat richtig. Da dieses Kriterium jedoch für uns von nachrangiger Bedeutung ist, verweisen wir für die korrekte Formulierung und den Beweis dieses Kriteriums auf den Anhang zu dieser Note.

Für das Kriterium aus Lemma 3.3 sind die Verhältnisse allerdings ganz anders gelagert und die Antwort wesentlich subtiler: Im Allgmeinen ist die Integrabilitätsbedingung *nicht* hinlänglich! In der Tat genügt die Funktion φ aus Beispiel 3.2, von der wir bereits eingesehen haben, dass sie kein Gradientenfeld ist, der Integrabilitätsbedingung, wie man leicht verfiziert. Der tiefer liegende Grund dafür, dass die Funktion φ aus Beispiel 3.2 keine Stammfunktion besitzt, ist jedoch in der topologischen Struktur der Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zu suchen. Diese Menge ist nämlich nicht *einfach zusammenhängend*,[2] da sie, salopp gesprochen, ein "Loch" enthält. Und tatsächlich stellt sich heraus, dass auf einfach zusammenhängenden Gebieten die Integrabilitätbedingung auch hinlänglich ist.

Für eine Vielzahl praktischer Anwendungen ist jedoch der folgende Satz, der zudem mit einem sehr einfachen Beweis aufwartet, völlig ausreichend.

3.4. **Satz.** *Die Menge D sei sternförmig, d.h., es existiere ein $z = (z_1, \dots, z_d) \in D$ derart, dass für alle $x \in D$ die Strecke von z nach x ganz in D enthalten sei. Es sei ferner φ eine stetig differenzierbare Funktion, welche*

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$$

für alle $j, k \in \{1, \dots, d\}$ erfülle. Dann ist φ ein Gradientenfeld und die Funktion

$$\Phi : D \to \mathbb{R};\ x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto \int_0^1 \sum_{k=1}^n \varphi_k(z + t(x - z))(x_k - z_k)\,\mathrm{d}t$$

ist eine Potentialfunktion zu φ.

Beweis. Da D sternförmig ist und φ stetig ist, ist Φ wohldefiniert. Wir setzen nun $f(t, x) := \sum_{k=1}^n \varphi_k(z + t(x - z))(x_k - z_k)$ für $(t, x) \in [0, 1] \times D$. Dann ist $f(\cdot, x)$ für alle $x \in D$ stetig auf $[0, 1]$ und $f(t, \cdot)$ ist für alle $t \in [0, 1]$ auf D stetig partiell differenzierbar mit

$$\left(\frac{\partial f(t, \cdot)}{\partial x_j}\right)(x) = \varphi_j(z + t(x - z)) + \sum_{k=1}^n t \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(z + t(x - z))(x_k - z_k)$$

für alle $(t, x) \in [0, 1] \times D$ und $j \in \{1, \dots, d\}$. Nach einem bekannten Satz aus der Analysis I/II über die Differenzierbakeit parameterabhängiger Integrale[3] ist damit

[2]Wir werden auf diesen Begriff nicht weiter eingehen.

[3]Wer mit dem Lebesgue-Integral vertraut ist, kann auch einen entsprechenden Satz über die Differenzierbakeit parameterabhängiger Lebesgue-Integrale heranziehen.

die Funktion Φ stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \left(\varphi_j(z+t(x-z)) + \sum_{k=1}^n t \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(z+t(x-z))(x_k - z_k) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\varphi_j(z+t(x-z)) + \sum_{k=1}^n t \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(z+t(x-z))(x_k - z_k) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\varphi_j(z+t(x-z)) + t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_j(z+t(x-z)) \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(t\varphi_j(z+t(x-z)) \right) \mathrm{d}t = \varphi_j(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in D$ und $j \in \{1, \ldots, d\}$. ☐

Das Besondere an Satz 3.4 ist, dass er neben dem reinen Existenzresultat eine konkrete Formel für das Potential Φ angibt.

4. Zurück in die Ebene

Wir kehren nun zum Spezialfall $d = 2$ und der Frage nach Existenz und Berechnung erster Integrale zurück.

Im zweiten Abschnitt haben wir zum Auffinden eines nichtkonstanten ersten Integrals den Ansatz verfolgt, passende Funktionen H und λ mit

$$(\nabla H)(x, y) = \lambda(x, y) \cdot (-h(x, y), g(x, y))$$

zu finden. Unter der zusätzlichen Annahme, dass λg und λh beide stetig partiell differenzierbar sind, gelangten wir alsdann zur Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda h) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g) \tag{4}$$

sowie zu den beiden nachstehenden Fragen.

(a) Ist (4) auch eine hinreichende Bedingung?
(b) Wie findet man ein solches H, wenn man schon weiß, dass es existiert?

Wir erkennen nun, dass diese beiden Fragen lediglich nach Existenz und Gestalt einer Potentialfunktion $\Phi = H$ für das Vektorfeld $\varphi = (-\lambda h, \lambda g)$ fragen. Beide Fragen werden daher *prinzipiell* durch Satz 3.4 auf eine für unsere Zwecke befriedigende Weise beantwortet. Doch die Bestimmung von H mit Hilfe der in Satz 3.4 angegebenen Formel für Φ ist in der Regel eher etwas unhandlich. Wir wollen daher noch eine andere Vorgehensweise aufzeigen, die in der Praxis sehr nützlich ist.

Wir nehmen wie zuvor an, dass die beiden Funktionen λg und λh stetig partiell differenzierbar sind und dass außerdem die Existenz einer Funktion H mit den oben genannten Eigenschaften bereits sichergestellt ist. Darüber hinaus nehmen wir an, dass $D = I \times J$ für zwei nichtleere, offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Für festes $y \in J$ ist die Funktion

$$\psi_y : I \to \mathbb{R};\ x \mapsto -\lambda(x, y)h(x, y)$$

stetig und wir definieren

$$\Psi_y(x) := \int_a^x \psi_y(t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in I$ und ein fixiertes $a \in I$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist Ψ_y differenzierbar mit $\Psi_y' = \psi_y$. Für alle $x \in I$ gilt somit

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = -\lambda(x,y)h(x,y) = \psi_y(x) = \frac{\mathrm{d}\Psi_y}{\mathrm{d}x}(x).$$

Folglich existiert eine eindeutig bestimmte nur von y, nicht aber von x abhängige Zahl $c(y) \in \mathbb{R}$ mit

$$H(x,y) = \Psi_y(x) + c(y)$$

für alle $x \in I$.[4] Hieraus ergibt sich $c(y) = H(a,y)$ für alle $y \in J$. Insbesondere ist die Funktion c selbst stetig differenzierbar. Wegen $\Psi_y(x) = H(x,y) - c(y)$ ist dann auch $\Psi(x,y) := \Psi_y(x)$ stetig partiell differenzierbar nach y und wir erhalten folglich

$$c'(y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) = \lambda(x,y)g(x,y) - \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y)$$

für alle $x \in I$ und $y \in J$. Insbesondere gilt also

$$c'(y) = \lambda(x,y)g(x,y) - \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y), \qquad (x,y) \in I \times J, \tag{5}$$

so dass die rechte Seite gar nicht von x abhängt. Mithin ist c durch (5) bis auf eine additive, von x *und* y unabhängige Konstante eindeutig bestimmt.[5] Desgleichen ist auch H auf der zusammenhängenden Menge $D = I \times J$ nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Ist also $d : J \to \mathbb{R}$ irgendeine $\mathcal{C}^1$-Funktion, welche (5) erfüllt, so genügt die Funktion

$$\widetilde{H} : D \to \mathbb{R};\ (x,y) \mapsto \Psi(x,y) + d(y)$$

der Gleichung

$$\nabla \widetilde{H} = (-\lambda h, \lambda g),$$

ist also ihrerseits ein erstes Integral.

Schließlich beachte man noch, dass eine beliebige Stammfunktion der Funktion ψ_y im Allgemeinen bzgl. der Variablen y *nicht* stetig differenzierbar zu sein braucht! Bespielsweise ist $\Psi(\cdot,y) + \mathbb{1}_{J\cap\mathbb{Q}}(y)$ eine Stammfunktion zu ψ_y, aber die Funktion $\Psi(x,\cdot) + \mathbb{1}_{J\cap\mathbb{Q}}$ ist (für festes $x \in I$) in keinem Punkte aus J differenzierbar (oder überhaupt stetig). Hat man jedoch irgendeine Stammfunktion der Funktion ψ_y, die zudem bzgl. der Variablen y stetig differenzierbar ist, so kann man das obige Verfahren auch mit einer solchen Stammfunktion anstelle von Ψ_y durchführen.

Diese Ausführungen motivieren daher in der beschriebenen Situation das folgende Vorgehen zur Bestimmung eines nichtkonstanten ersten Integrals:

---

[4] Hier geht ein, dass I ein Intervall ist.

[5] Hier geht ein, dass J ein Intervall ist.

- Finde eine Funktion $\lambda : D \to \mathbb{R}$ derart, dass einerseits λg und λh nicht beide die Nullfunktion sind und andererseits beide stetig partiell differenzierbar sind mit $\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda h) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g)$.
- Wähle eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}^d$ mit $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\lambda(x,y)h(x,y)$.
- Mache den Ansatz $H(x,y) = F(x,y) + c(y)$ mit einer noch zu bestimmenden C^1-Funktion $c : J \to \mathbb{R}$.
- Bestimme ein passendes c durch die Forderung

$$c'(y) = \lambda(x,y)g(x,y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

Natürlich kann man hierbei die Rollen von x und y vertauschen, was zu folgendem Vorgehen führt:

- Finde eine Funktion $\lambda : D \to \mathbb{R}$ derart, dass einerseits λg und λh nicht beide die Nullfunktion sind und andererseits beide stetig partiell differenzierbar sind mit $\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda h) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g)$.
- Wähle eine stetig differenzierbare Funktion $G : D \to \mathbb{R}^d$ mit $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \lambda(x,y)g(x,y)$.
- Versuche $H(x,y) = G(x,y) + \widetilde{c}(x)$ mit einer noch zu bestimmenden C^1-Funktion $\widetilde{c} : I \to \mathbb{R}$.
- Ermittele ein geeignetes $\widetilde{c}$ aus der Bedingung

$$\widetilde{c}'(x) = -\lambda(x,y)h(x,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,y).$$

Je nach Situation ist mal das eine, mal das andere Vorgehen vorteilhafter. In jedem Falle aber ist der erste Schritt, das Bestimmen von λ, stets der schwierigste, da hier eine partielle Differentialgleichung zu lösen ist. In der Regel wird man hierbei λ als von der Nullfunktion verschiedene $\mathcal{C}^1$-Funktion suchen.

Anhang A

Wie in Abschnitt 3 angekündigt geben wir hier noch eine weitere hinreichende Bedingung für die Existenz einer Potentialfunktion an, die durch Lemma 3.1 motiviert ist. Wie oben sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $d \in \mathbb{N}$. Zusätzlich nehmen wir an, dass für je zwei Punkte $x, y \in D$ ein stetiger, stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a,b] \to D$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ existiert.[6] Nach einer Umparametrisierung kann man hierbei stets $a = 0$ und $b = 1$ annehmen.

A.1. **Satz.** *Es sei φ ein stetiges Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass*

$$\int_\gamma \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

für jeden stetigen, stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to D$ erfüllt sei. Dann ist φ ein Gradientenfeld.

[6] Das ist keine wesentliche Einschränkung, da ja jede offene Menge als abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter Mengen, von denen eine jede der vorgenannten Bedingung genügt, geschrieben werden kann.

Beweis. Wir fixieren $x_0 \in D$ und wählen zu jedem $x \in D$ einen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma_x : [0,1] \to D$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$. Wir betrachten nun die durch

$$\Phi : D \to \mathbb{R};\ x \mapsto \int_{\gamma_x} \varphi(z)\,\mathrm{d}z$$

gegebene Funktion.[7]

Wir fixieren nun ein $x \in D$ und ein $j \in \{1, \dots, d\}$ und wählen ein $r > 0$ so, dass $U_r(x) \subseteq D$ erfüllt ist. Ferner bezeichne e_j den j-ten Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^d$. Für $h \in (-r, r)$ ist dann $x + he_j \in U_r(x)$. Des Weiteren setzen wir $\alpha_h(t) := x + the_j$ für $t \in [0,1]$ und jedes $h \in (-r, r) \setminus \{0\}$. Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\Phi(x) - \Phi(x + he_j) &= \Phi(x) + \int_{\alpha_h} \varphi(z)\,\mathrm{d}z - \Phi(x + he_j) - \int_{\alpha_h} \varphi(z)\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_{\alpha_h} \varphi(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen daraus folgt, dass wir den Ausdruck $\Phi(x) + \int_{\alpha_h} \varphi(z)\,\mathrm{d}z - \Phi(x + he_j)$ als ein einziges Wegintegral über φ schreiben können, wobei entlang eines geschlossenen Weges integriert wird; etwas informel gesprochen durchläuft dieser Weg erst den Weg γ_x, dann den Weg α_h und schließlich in umgekehrter Durchlaufrichtung den Weg γ_{x+he_j}. Wir berechnen nun

$$\int_{\alpha_h} \varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \big(\varphi(x + the_j)\big|he_j\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h\varphi_j(x + the_j)\,\mathrm{d}t.$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert nun ein $\tau_h \in [0,1]$ mit

$$\int_{\alpha_h} \varphi(z)\,\mathrm{d}z = h\varphi_j(x + \tau_h he_j).$$

Damit erhalten wir nun

$$\left|\frac{1}{h}(\Phi(x + he_j) - \Phi(x)) - \varphi_j(x)\right| = |\varphi_j(x + \tau_h he_j) - \varphi_j(x)|.$$

[7]Obgleich es für unsere Überlegungen nicht von Belang ist, wollen wir an dieser Stelle hervorheben, dass die Definition von Φ unabhängig von dem speziell gewählten Weg γ_x ist. Ist nämlich $\alpha_x : [0,1] \to D$ eine weiterer stetiger, stückweise stetig differenzierbarer Weg mit $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x$, so ist vermöge

$$\beta : [0,2] \to D;\ t \mapsto \begin{cases} \gamma_x(t), & \text{falls } 0 \le t \le 1, \\ \alpha_x(2-t), & \text{falls } 1 < t \le 2, \end{cases}$$

ein geschlossener, stetiger, stückweise stetig differenzierbarer Weg gegeben und wir erhalten folglich nach Voraussetzung (und Definition von β)

$$0 = \int_\beta \varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_x} \varphi(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\alpha_x} \varphi(z)\,\mathrm{d}z$$

und somit auch

$$\int_{\gamma_x} \varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\alpha_x} \varphi(z)\,\mathrm{d}z$$

wie behauptet.

Wegen $\tau_h \in [0,1]$ gilt $\lim_{h\to 0} h\tau_h = 0$, woraus sich zusammem mit der Stetigkeit von φ_j schließlich

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{1}{h}(\Phi(x+he_j) - \Phi(x)) - \varphi_j(x) \right| = 0$$

ergibt. Folglich ist Φ nach der j-ten Variablen partiell differenzierbar mit $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \varphi_j$. Wir haben also insgesamt $\nabla \Phi = \varphi$ gezeigt und φ als Gradientenfeld erkannt. $\square$