KOMPAKTE INTEGRALOPERATOREN

ZUSAMMENFASSUNG. Im Beweis des Satzes 14.3 wurde wesentlich die Kompaktheit eines gewissen Integraloperators ausgenutzt. In dieser kleinen Note weisen wir die Kompaktheit für eine durchaus reichhaltige Klasse von Integraloperatoren, in welche auch der besagte Operator fällt, nach.

1. EINFÜHRUNG

Ziel unserer Ausführungen ist der Beweis der folgenden Aussage.

1.1. **Proposition.** *Es seien* $p, q, r, p' \in (1, \infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *und mit* $r \geq \max\{p', q\}$ *und es sei* $k \in L^r(I^2)$*, wobei* $I := [0, 1]$*. Dann existiert eine Borel-messbare Nullmenge* N *derart, dass*

$$k(t, \cdot)\mathbb{1}_{I \setminus N}(t) f \in L^1(I)$$

für jedes $f \in L^p(I)$ *und jedes* $t \in I$ *gilt. Die Abbildung*

$$T : L^p(I) \to L^q(I), \qquad f \mapsto Tf$$

mit

$$Tf(t) = \int_0^1 k(t, s)\mathbb{1}_{I \setminus N}(t) f(s) \, \mathrm{d}s \qquad (t \in I)$$

liefert einen wohldefinierten, linearen und kompakten Operator mit $\|T\| \leq \|k\|_{L^r}$.

1.2. **Bemerkung.**
(a) Den Operator T in Proposition 1.1 bezeichnet man auch als *(den von k induzierten) fredholmschen Integraloperator* und k selbst heißt *(Integral-) Kern* oder *Kernfunktion.*
(b) Ohne Beweis vermerken wir, dass in der Ungleichung $\|T\| \leq \|k\|_{L^r}$ i.Allg. *keine Gleichheit* gilt.
(c) Ist $N' \subseteq I$ eine weitere messbare Nullmenge mit

$$k(t, \cdot)\mathbb{1}_{I \setminus N'}(t) f \in L^1(I)$$

für jedes $f \in L^p(I)$ und jedes $t \in I$, so gilt

$$k(t, s)\mathbb{1}_{I \setminus N'}(t) = k(t, s) = k(t, s)\mathbb{1}_{I \setminus N}(t)$$

für alle $(t, s) \in (I \setminus (N \cup N')) \times I$. Insbesondere stimmen die Funktionen

$$I \to \mathbb{K};\ t \mapsto \int_0^1 k(t, s)\mathbb{1}_{I \setminus N}(t) f(s) \, \mathrm{d}s$$

und

$$I \to \mathbb{K};\ t \mapsto \int_0^1 k(t, s)\mathbb{1}_{I \setminus N'}(t) f(s) \, \mathrm{d}s$$

Lebesgue-fast überall (nämlich außerhalb von $N' \cup N$) überein. Folglich ist T unabhängig von der spezifischen Wahl der Nullmenge N.

(d) Man kann die Formulierung von Proposition 1.1 vereinfachen, falls man explizit mit dem eigentlichen Lebesguemaß und nicht mit dem Borel-Lebesguemaß arbeitet,[1] da man dann einfach

$$Tf(t) := \begin{cases} \int_0^1 k(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s, & \text{falls } k(t,\cdot)f \in L^1(I), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

setzen kann.

(e) Wir haben das Resultat der Einfachheit halber für $[0,1]$ formuliert. Es gilt jedoch (wie der Beweis zeigen wird) entsprechend auf jedem kompakten Intervall $[a,b]$ (siehe außerdem Proposition 3.4 unten).

(f) Gilt $k(t,\cdot) \in L^{p'}(I)$ für alle $t \in I$, so kann man offenbar $N = \emptyset$ wählen. Insbesondere ist dies dann möglich, wenn k beschränkt oder bzgl. der zweiten Variablen stetig ist.

(g) Es existiere eine (messbare) Nullmenge $M \subseteq I^2$, sodass $k|_{I^2\setminus M}$ auf $I^2 \setminus M$ stetig und durch ein $C > 0$ beschränkt sei. Wir setzen $M_t := \{s \in I;\ (t,s) \in M\}$ für $t \in I$. Der Satz von Fubini liefert dann

$$0 = \lambda_2(M) = \int_I \lambda_1(M_t)\mathrm{d}\lambda_1(t),$$

was $\lambda_1(M_t) = 0$ für Lebesgue-fast alle $t \in I$ impliziert, wobei λ_1 das eindimensionale und λ_2 das zweidimensionale Borel-Lebesguemaß bezeichnet.[2] Sei nun $\widetilde{N} \subseteq I$ eine messbare Nullmenge mit $\lambda_1(M_t) = 0$ für alle $t \in I \setminus \widetilde{N}$.

Ist nun $t \in I \setminus (N \cup \widetilde{N})$ und $(t_n)_n$ eine Folge aus $I \setminus (N \cup \widetilde{N})$ mit Grenzwert t, so gilt mit $f \in L^p(I)$

$$|k(t_n,s)\mathbb{1}_N(t_n)f(s)| \leq C|f(s)|$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} k(t_n,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t_n)f(s) = \lim_{n\to\infty} k(t_n,s)f(s) = k(t,s)f(s) = k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t)f(s)$$

für alle $s \in I \setminus \left(M_t \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{t_n}\right)$, woraus wegen $f \in L^p(I) \subseteq L^1(I)$ (siehe Fußnote 4 unten) und $\lambda_1\left(M_t \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{t_n}\right) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 k(t_n,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t_n)f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t)f(s)\,\mathrm{d}s$$

mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz folgt. Dies zeigt, dass die Funktion $(Tf)|_{I\setminus(N\cup\widetilde{N})}$ zu $\mathcal{C}(I \setminus (N \cup \widetilde{N}))$ gehört.

Ist k sogar auf ganz I beschränkt und (als Funktion auf I^2) in allen Punkten aus $I^2 \setminus M$ stetig, so zeigt die im Wesentlichen gleiche Argumentation (unter

[1] Das Borel-Lebesguemaß wird zwar sehr häufig ebenfalls als Lebesguemaß bezeichnet, streng genommen handelt es sich jedoch bei dem eigentlichen Lebesguemaß um eine echte Fortsetzung des Borel-Lebesguemaßes von der σ-Algebra der Borelmengen auf die (echt größere) σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen. Allerdings ist diese Vergrößerung vom Standpunkt der Integrationstheorie derart marginal, dass er in der Regel ohne Belang ist. Für Details verweisen wir auf [1, II].

[2] Die gleiche Rechnung zeigt umgekehrt, dass $\lambda_2(M) = 0$ gilt, sofern $\lambda_1(M_t) = 0$ für Lebesgue-fast alle $t \in I$ erfüllt ist.

Beachtung des Umstandes, dass gemäß (f) nun $N = \emptyset$ angenommen werden darf) die schärfere Aussage, dass Tf in allen Punkten aus $I \setminus \widetilde{N}$ stetig ist.

Ist k schließlich sogar auf ganz I beschränkt und in allen Punkten aus $I^2 \setminus M$ stetig mit $\lambda_1(M_t) = 0$ für alle $t \in I$, so erhalten wir sogar $Tf \in \mathcal{C}(I)$ (da wir dann ja auch $\widetilde{N} = \emptyset$ wählen können).

Wir geben zwei wichtige Beispiele:

(i) Der Kern k ist auf ganz I^2 stetig. Dann können wir $M = \emptyset$ wählen. Mit $p = p' = q = r = 2$ in Proposition 1.1 erhält man dann im Übrigen gerade die im Beweis von Satz 14.3 verwendete Aussage über die Kompaktheit des dort auftretenden Integraloperators (falls $[a, b] = I$ gilt). Zugleich erhalten wir auch die dort nachgewiesene Aussage, dass der entsprechende Integraloperator nach $\mathcal{C}(I)$ abbildet.

(ii) Der Kern hat die Form $k(t, s) = \mathbb{1}_{\{(t,s)\in I^2;\ s\leq t\}}$. Wir können $M = \{(t, s) \in I^2;\ t = s\}$ wählen. Es gilt dann $M_t = \{t\}$.
Hier erhält man einen Operator mit

$$Tf(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in I$ und alle $f \in L^p(I)$. Dieser Operator wird als *Volterra-Operator* bezeichnet.

(h) Ist $\varphi : I \to I$ messbar so führt die Wahl $k(t, s) = \mathbb{1}_{\{(t,s)\in I^2;\ s\leq\varphi(t)\}}$ zum sog. *Volterra-Kompositionsoperator*, welcher

$$Tf(t) = \int_0^{\varphi(t)} f(s)\,\mathrm{d}s$$

für Lebesgue-fast alle $t \in I$ und alle $f \in L^p(I)$ erfüllt. Man beachte hierbei, dass die Menge $A := \{(t, s) \in I^2;\ s \leq \varphi(t)\}$ tatsächlich messbar ist. Denn die Abbildungen

$$\Phi : I^2 \to I^2;\ (t, s) \mapsto (\varphi(t), s)$$

und

$$\Psi : I^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x - y$$

sind messbar und somit auch ihre Komposition. Wegen $A = (\Psi \circ \Phi)^{-1}([0, \infty))$ ist daher A in der Tat messbar.

Für stetiges φ erhält man abermals $T(L^p(I)) \subseteq \mathcal{C}(I)$. Wir können dann nämlich $M = \{(t, s) \in I^2;\ s = \varphi(t)\}$ wählen. Dann gilt $M_t = \{\varphi(t)\}$ für alle $t \in I$.

Die beiden üblichen Beweise zu Proposition 1.1 teilen die gleiche Grundidee: Man approximiere T (bezüglich der Operatornorm) durch Operatoren $(T_n)_n$, von denen man leichter einsehen kann, dass sie kompakt sind.

Um nun eine solche Folge $(T_n)_n$ zu erhalten, liegt es nahe, die Kernfunktion k selbst durch "einfachere" Kerne $(k_n)_n$ geeignet zu approximieren, in der Hoffnung, dass sich dann die Wahl von $(T_n)_n$ als Folge der von den k_n induzierten fredholmschen Integraloperatoren als zielführend erweist.

In der Tat werden wir genau diesen Weg einschlagen. Doch wie sind die Kerne k_n zu wählen? Eine Möglichkeit besteht darin die k_n in $\mathcal{C}(I^2)$ zu wählen. Um dann jedoch einzusehen, dass die zugehörigen Integraloperatoren tatsächlich kompakt sind, kann der Satz von Arzelà-Ascoli, auf den wir hier gar nicht weiter eingehen wollen, zur Anwendung gebracht werden oder man approximiert die k_n ihrerseits wieder durch "einfachere" Funktionen wie z.B. Polynome in zwei (reellen) Veränderlichen (wozu man aber wiederum ein eigenes Approximationsresultat wie etwa den Approximationssatz von Stone-Weierstraß benötigt).

Wir wollen hingegen den Ansatz verfolgen, k durch Linearkombinationen aus Indikatorfunktionen von Rechtecken zu approximieren. Man überlegt sich dann nämlich leicht (und wir werden es später noch sehen), dass der von einer solchen Linearkombinationen induzierte Integraloperator endlichdimensionales Bild hat und folglich kompakt ist.

Überdies hat dieser Zugang auf konzeptueller Ebene den Vorzug, dass er sich, wie wir noch darlegen werden, mühelos auf weitaus allgemeinere Situationen übertragen lässt und zwar insbesondere auch auf solche Situationen, in denen kein Stetigkeitsbegriff zur Verfügung steht, sodass der erste Ansatz hier gar nicht durchführbar ist.

Ehe wir den Beweis zu Proposition 1.1 erbringen können, müssen wir aber erst einige Vorbereitungen treffen und ein paar Hilfsresultate zusammenklauben. Das wollen wir im nächsten Abschnitt tun.

2. Hilfsresultate

Die wesentliche Zutat, um den vorgeschlagenen Beweisweg beschreiten zu können, ist die folgende Aussage.

2.1. **Proposition.** *Es sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(I^2)$. Dann existiert eine Folge $(f_n)_n$ mit*

$$f_n = \sum_{j=1}^{M_n} \alpha_{j,n} \mathbb{1}_{A_{j,n} \times B_{j,n}}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0,$$

wobei $M_n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$ und $A_{j,n}, B_{j,n} \subseteq I$ jeweils Borel-messbar sind.

Die Beweisidee ist ganz einfach. Bekanntlich gibt es eine Folge $(g_n)_n$ mit $g_n = \sum_{m=1}^{K_n} \beta_{j,n} \mathbb{1}_{C_{j,n}}$ und $\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_p = 0$, wobei $K_n \in \mathbb{N}$, $\beta_j \in \mathbb{K}$ und $C_{j,n} \subseteq I^2$ jeweils Borel-messbar ist. Ist die Behauptung von Proposition 2.1 schon für Treppenfunktionen gezeigt, so finden wir zu jedem g_n ein f_n, das von der in Proposition 2.1 beschriebenen Bauart ist und zusätzlich $\|g_n - f_n\| < \frac{1}{n}$ erfüllt. Mit der Dreieckcksungleichung folgt dann sofort $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.

Es genügt daher, die Behauptung für Treppenfunktionen nachzuweisen. Da diese jedoch (endliche) Linearkombinationen von Indikatorfunktionen sind, kann man die Behauptung leicht auf die entsprechende Behauptung für Indikatorfunktionen zurückführen. Die Aussage in Proposition 2.1 folgt daher aus dem nachstehenden Lemma.

2.2. **Lemma.** *Ist* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *Borel-messbar mit* $\lambda_2(U) < \infty$*, so existiert eine Folge* $(f_n)_n$ *aus*

$$\mathfrak{A} := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j \times B_j} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ A_j,\ B_j \subseteq \mathbb{R} \text{ Borel-messbar mit } \lambda_1(A_j), \lambda_1(B_j) < \infty \right\}$$

derart, dass $\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_U - f_n\|_p = 0$ *für alle* $p \in [1, \infty)$ *erfüllt ist.*

Bevor wir den Beweis zu Lemma 2.2 führen, schicken wir eine technische Hilfsaussage voraus.

2.3. **Hilfssatz.** *Sind* $R_1, \dots, R_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *beschränkte achsenparallele links halboffene Rechtecke, d.h., es gilt* $R_k = I_k \times J_k$*, wobei* $I_k, J_k \subseteq \mathbb{R}$ *(möglicherweise leere) beschränkte links halboffene Intervalle sind, so gibt es paarweise disjunkte beschränkte achsenparallele links halboffene Rechtecke* $S_1, \dots, S_m$ $(m \in \mathbb{N})$ *mit* $\bigcup_{j=1}^m S_j = \bigcup_{k=1}^n R_k$.

Beweis. Ist $R = (a_1, b_1] \times (u_1, v_1]$ und $S = (a_2, b_2] \times (u_2, v_2]$ so gilt

$$R \cap S = (\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}] \times (\max\{u_1, u_2\}, \min\{v_1, v_2\}].$$

Also ist der Schnitt zweier beschränkter achsenparalleler links halboffener Rechtecke selbst wieder ein beschränktes achsenparalleles links halboffenes Rechteck.

Wir zeigen nun als nächstes, dass sich $R \setminus S$ als Vereinigung von paarweise disjunkten beschränkten achsenparallelen links halboffenen Rechtecken schreiben lässt. Wegen $R \setminus (R \cap S) = R \setminus S$ und dem gerade Gezeigten, dürfen wir hierbei $S \subseteq R$ annehmen. Dann gilt $a_1 \le a_2 \le b_2 \le b_1$ und $u_1 \le u_2 \le v_2 \le v_1$ und folglich auch

$$R \setminus S = \{(x, y) \in R;\ x \le a_2 \vee x > b_2 \vee y \le u_2 \vee y > v_2\}$$

Wir betrachten die folgenden Mengen

$$Q_1 := (a_1, a_2] \times (u_1, v_1],$$
$$Q_2 := (a_2, b_1] \times (v_2, v_1],$$
$$Q_3 := (b_2, b_1] \times (u_1, v_2]$$

und

$$Q_4 := (a_2, b_2] \times (u_1, u_2].$$

Dies sind paarweise disjunkte beschränkte achsenparallele links halboffene Rechtecke, welche, wie man leicht bestätigt, auch $\bigcup_{j=1}^4 Q_j = R \setminus S$ erfüllen.

Nun zeigen wir die eigentliche Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei die Behauptung nun schon für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt und seien $R_1, \dots, R_{n+1}$ beschränkte achsenparallele links halboffene Rechtecke. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung paarweise disjunkte beschränkte achsenparallele links halboffene Rechtecke $S_1, \dots, S_m$ $(m \in \mathbb{N})$ mit $\bigcup_{j=1}^m S_j = \bigcup_{k=1}^n R_k$. Es gilt dann

$$\bigcup_{k=1}^{n+1} R_k = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} S_j \cup R_{n+1} = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} (S_k \setminus R_{n+1}) \dot{\cup} R_{n+1}.$$

Nach dem oben Gezeigten lässt sich jede der Mengen $S_k \setminus R_{n+1}$ als Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten beschränkten achsenparallelen links halboffenen

Rechtecken schreiben. Mithin ist $\bigcup_{k=1}^{n+1} R_k$ selbst die Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten beschränkten achsenparallelen links halboffenen Rechtecken. $\square$

Nun können wir Lemma 2.2 beweisen.

Beweis zu Lemma 2.2. Es sei $p \in [1,\infty)$ beliebig. Da das zweidimensionale Lebesguemaß λ_2 (von außen) regulär ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $U_n \supseteq U$ mit $\lambda_2(U_n \setminus U) < \frac{1}{n}$. Da U endliches Maß hat, hat auch jede der Mengen U_n endliches Maß. Daher gilt $\mathbb{1}_{U_n} \in L^p(\mathbb{R}^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten nun

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbb{1}_{U_n} - \mathbb{1}_U|^p \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{U_n\setminus U} \,\mathrm{d}\lambda_2 = \lambda_2(U_n \setminus U) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

bzw. $\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_{U_n}\|_p = 0$. Daher genügt es, die Aussage für offenes U zu beweisen.

Sei nun also U im Folgenden als offen vorausgesetzt. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \bigcup \{\mathcal{A}_z;\ z \in \mathbb{Q}^2 \cap U\},$$

wobei

$$\mathcal{A}_z := \left\{ S_r(z) := (u-r, u+r] \times (v-r, v+r] \,\middle|\, S_r(z) \subseteq U \text{ und } r \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q} \right\}$$

für $z = (u,v) \in \mathbb{Q}^2 \cap U$. Aus der Definition ergibt sich unmittelbar, dass $\mathcal{A}$ abzählbar ist.

Darüber hinaus gilt $\bigcup \mathcal{A} = U$. Hierbei ist die Inklusion $\bigcup \mathcal{A} \subseteq U$ nach Definition klar. Ist $(x,y) \in U$ beliebig, so finden wir ein $\epsilon > 0$ mit $(x-\epsilon, x+\epsilon) \times (y-\epsilon, y+\epsilon) \subseteq U$.[3] Wir wählen nun ein $r \in (0, \frac{\epsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$ und ein $z = (u,v) \in \mathbb{Q}^2$ mit $|x-u| < r$ und mit $|y-v| < r$; dann gilt insbesondere $(u,v) \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \times (y-\epsilon, y+\epsilon) \subseteq U$ und $(x,y) \in S_r(z) = (u-r, u+r] \times (v-r, v+r]$. Ist nun $(s,t) \in S_r(z)$ beliebig, so folgt $|x-s| \le |x-u| + |u-s| < 2r < \epsilon$ sowie $|y-t| \le |y-v| + |v-t| < 2r < \epsilon$, was $(s,t) \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \times (y-\epsilon, y+\epsilon)$ impliziert. Daher erhalten wir

$$S_r(z) \subseteq (x-\epsilon, x+\epsilon) \times (y-\epsilon, y+\epsilon) \subseteq U,$$

was $S_r(z) \in \mathcal{A}_z$ nach sich zieht, woraus sich wiederum $(x,y) \in \bigcup \mathcal{A}$ ergibt. Und da wir $(x,y) \in U$ beliebig gewählt haben, folgt $\bigcup \mathcal{A} = U$.

Wegen der Abzählbarkeit von $\mathcal{A}$ sehen wir somit, dass es eine Folge $(R_n)_n$ von beschränkten achsenparallelen links halboffenen Rechtecken mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n = U$ gibt. Wir setzen nun $C_n := \bigcup_{j=1}^n R_j$. Wegen der Stetigkeit des Lebeguemaßes von unten, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \lambda_2(C_n) = \lambda_2\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m\right) = \lambda_2\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k\right) = \lambda_2(U)$ bzw. (wegen $\lambda_2(U) < \infty$) $\lim_{n\to\infty} \lambda_2(U \setminus C_n) = 0$, woraus sich

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbb{1}_{C_n} - \mathbb{1}_U|^p \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{U\setminus C_n} \,\mathrm{d}\lambda_2 = \lambda_2(U \setminus C_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

[3]Das folgt aus der Offenheit von U, indem man anstelle der üblichen euklidischen Norm die Maximumsnorm betrachtet.

bzw. $\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_{C_n} - \mathbb{1}_U\|_p = 0$ ergibt. Nach Hilfssatz 2.3 existieren zu jedem C_n paarweise disjunkte beschränkte achsenparallele links halboffene Rechtecke $S_{j,n} = (a_{j,n}, b_{j,n}] \times (u_{j,n}, v_{j,n}]$ ($j \in \{1, \ldots, M_n\}$) mit $C_n = \bigcup_{j=1}^{M_n} S_{j,n}$. Folglich gilt dann

$$\mathbb{1}_{C_n} = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{(a_{j,n}, b_{j,n}] \times (u_{j,n}, v_{j,n}]}$$

und wir erkennen $\mathbb{1}_{C_n} \in \mathfrak{A}$. □

3. Beweis von Proposition 1.1

Wir kommen nun zum Beweis von Proposition 1.1.

Beweis von Proposition 1.1. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Schritt: Existenz von N.

Der Satz von Fubini-Tonelli liefert, dass die Menge

$$N := \{t \in I;\ |k(t, \cdot)|^r \notin L^1(I)\}$$

eine messbare Nullmenge ist. Da (I, λ_1) ein endlicher Maßraum ist, gilt $L^r(I) \subseteq L^{p'}(I)$ (wegen $r \geq p'$);[4] insbesondere gilt daher $|k(t, \cdot)|^{p'} \in L^1(I)$ für alle $t \in I \setminus N$. Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt nun nach dem Satz von der Hölder-Ungleichung $k(t, \cdot)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f \in L^1(I)$ für alle $f \in L^p(I)$ und alle $t \in I$.

2. Schritt: Wohldefiniertheit und Stetigkeit von T.

Zunächst ist zu zeigen, dass T tatsächlich nach $L^q(I)$ abbildet (das ist die Wohldefiniertheit). Sei $f \in L^p(I)$ beliebig. Da die Abbildung

$$I^2 \to \mathbb{K};\ (t, s) \mapsto k(t, s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)$$

messbar ist, ist nach dem Satz von Fubini-Tonelli auch die Abbildung

$$I \to \mathbb{K};\ t \mapsto \int_0^1 \left|k(t, s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\right| \mathrm{d}s$$

messbar und es folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\int_0^1 \left|k(t, s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\right| \mathrm{d}s\right)^q \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{I\setminus N} \left(\left(\int_0^1 |k(t, s)|^{p'} \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^1 |f(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q \mathrm{d}t \qquad (1)\\
&= \|f\|_{L^p}^q \int_{I\setminus N} \|k(t, \cdot)\|_{L^{p'}}^q \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

[4] In der Tat liefert die Hölderungleichung für ein $h \in L^r(I)$ die Abschätzung

$$\int_I |h|^{p'} \mathrm{d}x \leq \left(\int_I \left(|h|^{p'}\right)^{\frac{r}{p'}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{r}} \left(\int_I \mathbb{1}^{(1-\frac{p'}{r})^{-1}} \mathrm{d}x\right)^{1-\frac{p'}{r}} = \left(\int_I |h|^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{r}} < \infty$$

und es folgt $L^r(I) \subseteq L^{p'}(I)$ mit $\|h\|_{L^{p'}} \leq \|h\|_{L^r}$ für alle $h \in L^r(I)$.

Aus der Bemerkung in der Fußnote 4 erhält man

$$\|k(t,\cdot)\|_{L^{p'}}^q \le \|k(t,\cdot)\|_{L^r}^q \tag{2}$$

für alle $t \in I \setminus N$. Die Hölderungleichung liefert ($\frac{r}{q} \ge 1$)

$$\begin{aligned} \int_{I\setminus N} \|k(t,\cdot)\|_{L^r}^q \,\mathrm{d}t &\le \left(\int_{I\setminus N} \|k(t,\cdot)\|_{L^r}^r \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{r}} \left(\int_{I\setminus N} \mathbb{1}^{(1-\frac{q}{r})^{-1}} \,\mathrm{d}t\right)^{1-\frac{q}{r}} \\ &= \left(\int_{I\setminus N} \|k(t,\cdot)\|_{L^r}^r \mathrm{d}t\right)^{\frac{q}{r}} \end{aligned} \tag{3}$$

Der Satz von Fubini-Tonelli impliziert nun (gemäß Definition von N)

$$\infty > \int_{I^2} |k(t,s)|^r \,\mathrm{d}\lambda_2(t,s) = \int_{I\setminus N} \int_0^1 |k(t,s)|^r \mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_{I\setminus N} \|k(t,\cdot)\|_{L^r}^r \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Aus (1),(2), (3) und (4) folgt nun

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left|k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\right| \,\mathrm{d}s\right)^q \,\mathrm{d}t \le \|f\|_{L^p}^q \left(\int_{I^2} |k(t,s)|^r \,\mathrm{d}\lambda_2(t,s)\right)^{\frac{q}{r}} < \infty. \tag{5}$$

Dies impliziert wie schon zuvor (vgl. abermals Fußnote 4)

$$\int_0^1 \int_0^1 \left|k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\right| \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \le \int_0^1 \left(\int_0^1 \left|k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\right| \,\mathrm{d}s\right)^q \,\mathrm{d}t < \infty.$$

Der Satz von Fubini-Tonelli liefert nun nacheinander, dass die Abbildung

$$I^2 \to \mathbb{K};\ (t,s) \mapsto k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)$$

über I^2 integrabel ist, dass die Menge

$$N_f := \{t \in I;\ k(t,\cdot)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(\cdot) \notin L^1(I)\}$$

eine messbare Nullmenge ist und dass die Abbildung

$$\widetilde{f} : I \to \mathbb{K};\ t \mapsto \begin{cases} \int_0^1 k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s) \,\mathrm{d}s, & \text{falls } t \notin N_f, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

integrabel, also insbesondere messbar ist. Nach Wahl von N gilt jedoch $N_f = \emptyset$ und wir erhalten, dass $Tf = \widetilde{f}$ eine messbare Funktion ist.

Mit Hilfe von (5) erhalten wir nun zudem

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(Tf)(t)|^q \,\mathrm{d}t &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 \left|k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\right| \,\mathrm{d}s\right)^q \,\mathrm{d}t \\ &\le \|f\|_{L^p}^q \left(\int_{I^2} |k(t,s)|^r \,\mathrm{d}\lambda_2(t,s)\right)^{\frac{q}{r}} \\ &= \|f\|_{L^p}^q \|k\|_{L^r}^q < \infty. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $Tf \in L^q(I)$ sowie $\|Tf\|_{L^q} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|k\|_{L^r}$. Die Abbildung T ist also wohldefiniert, offenkundig linear und wegen der letzten Ungleichung auch stetig mit $\|T\| \le \|k\|_{L^r}$.

3. Schritt: Kompaktheit von T für spezielle Integralkerne.

Wir nehmen nun vorübergehend an, dass k von der Gestalt

$$k(t,s) = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{1}_{A_j \times B_j}(t,s) = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{1}_{A_j}(t) \mathbb{1}_{B_j}(s) \qquad ((t,s) \in I^2)$$

ist, wobei $m \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{K}$ und $A_j, B_j \subseteq I$ messbar sind. Offenkundig gilt hier $N = \emptyset$. Wir erhalten nun

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{j=1}^{m} a_j \left(\int_{B_j} f(s)\,\mathrm{d}s \right) \mathbb{1}_{A_j}(t)$$

für alle $t \in I$ und $f \in L^p(I)$ und daher auch

$$Tf \in \mathrm{LH}\{\mathbb{1}_{A_j};\ j \in \{1, \ldots, m\}\}$$

für alle $f \in L^p(I)$. Der Operator T hat also endlichdimensionales Bild, ist damit insbesondere kompakt.

4. Schritt: Kompaktheit von T für alle Integralkerne $k \in L^r(I^2)$.

Sei nun wieder $k \in L^r(I^2)$ beliebig. Wir wählen nun gemäß Proposition 2.1 eine Folge k_n mit

$$k_n(t,s) = \sum_{j=1}^{M_n} \alpha_{j,n} \mathbb{1}_{A_{j,n} \times B_{j,n}}(t,s)$$

für alle $(t,s) \in I^2$ und mit

$$\lim_{n \to \infty} \|k - k_n\|_p = 0,$$

wobei $M_n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{K}$ und $A_{j,n}, B_{j,n} \subseteq I$ jeweils Borel-messbar sind, und wir betrachten die zugehörigen Integraloperatoren T_n. Dann gilt

$$(T - T_n)f(t) = \int_0^1 \big(k(t,s)\mathbb{1}_{I \setminus N}(t) - k_n(t,s)\big)\, f(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in I$, $f \in L^p(I)$ und $n \in \mathbb{N}$. Also ist $T - T_n$ selbst wieder ein Integraloperator mit Kernfunktion

$$I^2 \to \mathbb{K};\ (t,s) \mapsto k(t,s)\mathbb{1}_{I \setminus N}(t) - k_n(t,s),$$

welche offenbar wieder zu $L^r(I^2)$ gehört. Nach Schritt 2 gilt daher

$$\|T - T_n\| \leq \left(\int_{I^2} |k(t,s)\mathbb{1}_{I \setminus N}(t) - k_n(t,s)|^r \,\mathrm{d}(t,s) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Da $N \times I$ eine (λ_2-)Nullmenge ist, folgt

$$\begin{aligned}\left(\int_{I^2} |k(t,s)\mathbb{1}_{I \setminus N}(t) - k_n(t,s)|^r \,\mathrm{d}(t,s) \right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_{I^2} |k(t,s) - k_n(t,s)|^r \,\mathrm{d}(t,s) \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \|k - k_n\|_{L^r} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\end{aligned}$$

und wir erhalten $\lim_{n \to \infty} T_n = T$ in $\mathfrak{B}(L^p(I), L^q(I))$. Nach Schritt 3 sind alle Operatoren T_n kompakt und folglich ist es damit auch T selbst.[5] □

[5] Siehe Aufgabe 47 a).

3.1. **Bemerkung.** Es seien nun $p = p' = q = r = 2$. Wir setzen $k^\star(t,s) := \overline{k(s,t)}$ $((t,s) \in I^2)$ sowie

$$N^\star := \{s \in I;\ |k(\cdot,s)|^r \notin L^1(I)\}$$

und betrachten den zugehörigen Integraloperator $T^\star \in \mathfrak{B}(L^2(I))$. Wegen $|k| \in L^2(I^2)$ liefern Proposition 1.1 und der Satz von der Hölderungleichung zusammen

$$\int_I \int_I |k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\overline{g(t)}|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_I \underbrace{\int_I |k(t,s)|\mathbb{1}_{I\setminus N}(t)|f(s)|\,\mathrm{d}s}_{\in L^2(I)}\ \underbrace{|g(t)|}_{\in L^2(I)}}_{\in L^1(I)}\,\mathrm{d}t < \infty$$

für alle $f, g \in L^2(I)$, womit gezeigt ist, dass die Funktion

$$I^2 \to \mathbb{K};\ (t,s) \mapsto k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\overline{g(t)}$$

für alle $f, g \in L^2(I)$ über I^2 integrabel ist. Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
(Tf|g) &= \int_I \int_I k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\,\mathrm{d}s\ \overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{I^2} k(t,s)\mathbb{1}_{I\setminus N}(t) f(s)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}(t,s) \\
&= \int_{I^2} k(t,s) f(s)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}(t,s) = \int_{I^2} f(s)\overline{\overline{k(t,s)}g(t)}\,\mathrm{d}(t,s) \\
&= \int_{I\setminus N^\star} \int_I f(s)\overline{k^\star(s,t)g(t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_I f(s)\overline{\int_I k^\star(s,t)\mathbb{1}_{I\setminus N^\star}(s) g(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s \\
&= (f|T^\star g)
\end{aligned}$$

für alle $f, g \in L^2(I)$. Für $k = k^\star$ ist T dann insbesondere symmetrisch.[6]

Abschließend wollen wir noch einen Ausblick auf ein allgemeineres Ergebnis geben und darlegen, dass die Argumente des hier vorgelegten Beweises im Kern so allgemein gehalten sind, dass sich (die nötigen Vorkenntnisse vorausgesetzt) der Beweis auf deutlich allgemeinere Situation übertragen lässt.[7]

In der Tat haben wir lediglich beim Beweis zu Proposition 2.1 spezifische Eigenschaften des Lebesguemaßes (äußere Regularität) bzw. des Raumes $\mathbb{R}^2$ (z.B. Hilfssatz 2.3) ausgenutzt. Tatsächlich führen allgemeine maßtheoretische Überlegungen zu der folgenden Verallgemeinerung von Proposition 2.1.

3.2. **Proposition.** *Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$ ein Halbring mit $\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{A}$ derart, dass $\mu|_{\mathfrak{H}}$ σ-endlich ist. Dann gilt*

$$\overline{\mathrm{LH}\{\mathbb{1}_A;\ A \in \mathfrak{H} \text{ mit } \mu(A) < \infty\}} = L^p(\mu)$$

für alle $p \in [1, \infty)$

[6]Wir bemerken außerdem, dass unsere hiesige Notation mit der Notation aus Aufgabe 41 verträglich ist: Der von $k^\star$ induzierte Integraloperator $T^\star$ ist, wie unsere Rechnung zeigt, gerade der zu T adjungierte Operator.

[7]Im Folgenden setzen wir eine hinlängliche Vetrautheit mit (abstrakter) Maß- und Integrationstheorie voraus.

Für einen Beweis dieser Aussage verweisen wir auf [1, VI.2.28].

Das nachstehende Korollar zeigt, dass Proposition 3.2 tatsächlich als Verallgemeinerung von Proposition 2.1 angesehen werden kann.

3.3. **Korollar.** *Es seien $(X,\mathfrak{A},\mu)$ und $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ zwei σ-endliche Maßräume. Dann gilt*

$$\overline{\mathrm{LH}\{\mathbb{1}_{A\times B};\ A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B} \text{ mit } \mu(A),\mu(B)<\infty\}} = L^p(\mu\otimes\nu)$$

für alle $p\in[1,\infty)$, wobei $\mu\otimes\nu:\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}\to[0,\infty]$ das von μ und ν herrührende Produktmaß bezeichnet.

Beweis. Es sei $p\in[1,\infty)$ beliebig. Nach Definition der von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ herrührenden Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ ist der Halbring $\mathfrak{H}:=\{A\times B;\ A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$. Da μ und ν beide σ-endlich sind, trifft dies auch auf $\mu\otimes\nu$ zu und es gilt folglich

$$\overline{\mathrm{LH}\{\mathbb{1}_{A\times B};\ A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B} \text{ mit } (\mu\otimes\nu)(A\times B)<\infty\}} = L^p(\mu\otimes\nu)$$

nach Proposition 3.2. Für $A\times B\in\mathfrak{H}$ gilt aber $(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$ (mit der Konvention $0\cdot\infty:=\infty\cdot 0:=0$) nach Definition des Produktmaßes. Daher gilt $(\mu\otimes\nu)(A\times B)<\infty$ genau dann, wenn sowohl $\mu(A)<\infty$ als auch $\nu(B)<\infty$ gilt oder wenn eine der beiden Mengen A bzw. B eine Nullmenge ist. Im letzt genannten Fall gilt dann $(\mu\otimes\nu)(A\times B)=0$ und $\mathbb{1}_{A\times B}$ ist dann $\mu\otimes\nu$-fast überall gleich 0. Mithin erhalten wir

$$\overline{\mathrm{LH}\{\mathbb{1}_{A\times B};\ A\in\mathfrak{A},\ B\in\mathfrak{B} \text{ mit } \mu(A),\mu(B)<\infty\}} = L^p(\mu\otimes\nu)$$

wie behauptet. □

Mit Korollar 3.3 als Ersatz für Proposition 2.1 kann man nun den Beweis zu Proposition 1.1 nahezu wortwörtlich übernehmen, um das folgende Resultat zu erhalten.

3.4. **Proposition.** *Es seien $(X,\mathfrak{A},\mu)$ und $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ zwei endliche Maßräume. Des Weiteren seien $p,q,r,p'\in(1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ und mit $r\geq\max\{p',q\}$ und es sei $k\in L^r(\mu\otimes\nu)$. Dann existiert eine μ-Nullmenge $N\in\mathfrak{A}$ derart, dass*

$$k(t,\cdot)\mathbb{1}_{X\setminus N}(t)f\in L^1(\nu)$$

für jedes $f\in L^p(\nu)$ und jedes $t\in X$ gilt. Die Abbildung

$$T:L^p(\nu)\to L^q(\mu),\qquad f\mapsto Tf$$

mit

$$Tf(t)=\int_0^1 k(t,s)\mathbb{1}_{X\setminus N}(t)f(s)\,\mathrm{d}\nu(s)\qquad(t\in X)$$

liefert einen wohldefinierten, linearen und kompakten Operator, welcher $\|T\|\leq\|k\|_{L^r(\mu\otimes\nu)}$ erfüllt.

In dieser Situation gilt ebenfalls eine zu Bemerkung 3.1 analoge Feststellung (allerdings mit $T^\star\in\mathfrak{B}(L^2(\mu),L^2(\nu))$).

Literatur

[1] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer-Verlag, Berlin 2011.