DIFFERENTIATION PARAMETERABHÄNGIGER INTEGRALE

Zusammenfassung. Ergänzend zur Übung vom 06.06.2013 soll hier die Leibnizregel für die Differentiation parameterabhängiger Integrale formuliert und bewiesen werden.

Es seien $x_0 < x_1$ reelle Zahlen und $a, b : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Wir setzen

$$D := \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [x_0, x_1] \text{ und } \min\{a(x), b(x)\} \leq t \leq \max\{a(x), b(x)\}\big\}.$$

Es gilt der folgende Satz.

1. **Satz.** *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $D \subseteq U$ und es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche bzgl. der ersten Variablen stetig partiell differenzierbar sei. Dann ist die Funktion*

$$F : [x_0, x_1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x)$$

für alle $x \in [x_0, x_1]$.[1]

Zum Beweis erinnern wir an das folgende weithin bekannte Resultat über die Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale.

2. **Satz.** *Es seien $\alpha < \beta$ reelle Zahlen, $d \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in \mathbb{R}^d$ mit $\|u\|_2 = 1$. Ferner sei $f : \Omega \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den beiden folgenden Eigenschaften.*

(a) *Für alle $x \in \Omega$ ist die Abbildung*

$$f(x, \cdot) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R};\ t \mapsto f(x,t)$$

Riemann-integrabel.

(b) *Für alle $(x,t) \in \Omega \times [\alpha, \beta]$ existiert die Richtungsableitung*

$$(D_u f)(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hu, t) - f(x,t)}{h}$$

und die hierdurch definierte Funktion

$$D_u f : \Omega \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R};\ (x,t) \mapsto (D_u f)(x,t)$$

ist stetig.

[1] Differenzierbarkeit in den Randpunkten ist natürlich wie üblich als einseitige Differenzierbarkeit zu verstehen.

Dann existiert für die Funktion

$$F : \Omega \to \mathbb{R};\ x \mapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

in allen Punkten $x \in \Omega$ die Richtungsableitung $(D_u F)(x)$ und es gilt

$$(D_u F)(x) = \int_\alpha^\beta (D_u f)(x,t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in \Omega$. Insbesondere ist $D_u F$ auch wieder stetig.[2]

3. **Bemerkung.** (a) Unter Verwendung der Lebesgue'schen Integrationstheorie lässt sich eine deutlich allgemeinere Version von Satz 2 herleiten (vgl. etwa [1, IV.5.7]).
(b) Im Falle $d = 1$ kann man anstelle einer offenen Menge Ω auch ein abgeschlossenes Intervall zulassen (Differenzierbarkeit in den Randpunkten ist dann als einseitige Differenzierbakeit zu verstehen); das zeigt man fast genauso wie Satz 2.[3]

Nun können wir Satz 1 beweisen.

Beweis von Satz 1. Wir fixieren zunächst ein $x \in [x_0, x_1]$.

Wegen $(x, a(x)) \in D \subseteq U$, der Stetigkeit von a und der Offenheit der Menge U gilt

$$\big\{(x+h,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \min\{a(x), a(x+h)\} \le t \le \max\{a(x), a(x+h)\}\big\} \subseteq U \tag{1}$$

für alle $h \in \mathbb{R}$, die hinreichend nahe bei 0 sind und $x + h \in [x_0, x_1]$ erfüllen.[4] Analog sieht man ein, dass die Inklusion

$$\big\{(x+h,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \min\{b(x), b(x+h)\} \le t \le \max\{b(x), b(x+h)\}\big\} \subseteq U \tag{2}$$

für hinlänglich kleines $|h|$ mit $x + h \in [x_0, x_1]$ erfüllt ist. Da die Menge

$$A := \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \min\{a(x), b(x)\} \le t \le \max\{a(x), b(x)\}\big\}$$

eine kompakte Teilmenge der offenen Menge U ist, existiert ein $r > 0$ derart, dass

$$\{z \in \mathbb{R}^2;\ \mathrm{dist}(z, A) < r\} \subseteq U$$

gilt. Folglich gilt dann auch

$$\big\{(x+h,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \min\{a(x), b(x)\} \le t \le \max\{a(x), b(x)\}\big\} \subseteq U \tag{3}$$

für $|h| < r$.

---

[2] Für diejenigen, denen dieser Satz nicht oder nicht in dieser Form bekannt ist, findet sich im Anhang ein Beweis.

[3] Im Beweis, der sich im Anhang findet, ist lediglich das kompakte Intervall $\overline{U_r(x)} = [x - r, x + r]$ durch $[x - r, x]$ bzw. $[x, x + r]$ zu ersetzen und man hat dort $h \in (-\rho, 0)$ bzw. $h \in (0, \rho)$ zu wählen, je nachdem, ob x rechter bzw. linker Randpunkt ist; dabei ist $u = 1$ gesetzt.

[4] Für $x = x_0$ gilt also zusätzlich $h \ge 0$ und entsprechend $h \le 0$ für $x = x_1$.

Sei nun $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ so nahe bei 0 gewählt, dass die oben aufgeführten Inklusionen (1)–(3) allesamt gültig sind, und so, dass zudem $x+h \in [x_0, x_1]$ erfüllt ist. Dann sind die nachfolgend auftretenden Integrale wohldefiniert und wir erhalten

$$\begin{aligned}
F(x+h) - F(x) &= \int_{a(x+h)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a(x+h)}^{a(x)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t + \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+h,t) - f(x,t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t - \int_{a(x)}^{a(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein $\tau_{b,h}(x)$ zwischen $b(x)$ und $b(x+h)$ bzw. ein $\sigma_{a,h}(x)$ zwischen $a(x)$ und $a(x+h)$ mit

$$\int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t = (b(x+h) - b(x))f(x+h, \tau_{b,h}(x))$$

bzw. mit

$$\int_{a(x)}^{a(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t = (a(x+h) - a(x))f(x+h, \sigma_{a,h}(x)).$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen b und a gilt zudem $\lim_{h\to 0} \tau_{b,h}(x) = b(x)$ bzw. $\lim_{h\to 0} \sigma_{a,h}(x) = a(x)$. Damit erhalten wir (unter Verwendung der Stetigkeit der Funktion f und der Differenzierbarkeit von a und b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(b(x+h)-b(x))f(x+h, \tau_{b,h}(x)) = b'(x)f(x, b(x))$$

bzw.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{a(x)}^{a(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(a(x+h)-a(x))f(x+h, \sigma_{a,h}(x)) = a'(x)f(x, a(x)).$$

Darüber hinaus gilt nach Satz 2 (angewendet auf die Funktion $f|_{(x-r,x+r)\times I}$ mit $I := [\min\{a(x), b(x)\}, \max\{a(x), b(x)\}]$ und dem obigen $r > 0$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+h,t) - f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Insgesamt liefert dies sodann

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x)$$

wie behauptet. □

4. **Bemerkung.** (a) Sind die Funktionen a und b sogar stetig differenzierbar, so ist auch die Funktion F in Satz 1 ihrerseits stetig differenzierbar.

(b) Es sei $g : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir setzen nun $a(x) := x_0$ und $b(x) := x$ für $x \in [x_0, x_1]$ und definieren $f(x,t) := g(t)$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [x_0, x_1]$, $f(x,t) := g(x_0)$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, x_0]$ sowie $f(x,t) := g(x_1)$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [x_1, \infty)$. Dann liefert Satz 1 präzise einen Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: Die Funktion

$$F : [x_0, x_1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = f(x, b(x))b'(x) = g(x)$$

für alle $x \in [x_0, x_1]$.

Anhang A. Ein Beweis zu Satz 2

Es seien $x \in \Omega$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir wählen zunächst ein $r > 0$ so, dass $\overline{U_r(x)} \subseteq \Omega$ erfüllt ist. Da $D_u f$ als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\overline{U_r(x)} \times [\alpha, \beta]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|(D_u f)(x_1, t_1) - (D_u f)(x_2, t_2)| < \frac{\epsilon}{\beta - \alpha + 1}$$

für alle $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \overline{U_r(x)} \times [\alpha, \beta]$ mit $\|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)\|_2 < \delta$.

Es sei nun $h \in (-\rho, \rho) \setminus \{0\}$ beliebig, wobei $\rho := \min\{\delta, r\}$. Dann ist für jedes (feste) $t \in [\alpha, \beta]$ die Funktion

$$g : [\min\{0,h\}, \max\{0,h\}] \to \mathbb{R};\ s \mapsto f(x + su, t)$$

wohldefiniert und nach Voraussetzung stetig differenzierbar mit

$$g'(s) = (D_u f)(x + su, t)$$

für alle $s \in [\min\{0,h\}, \max\{0,h\}]$.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert daher zu jedem $t \in [\alpha, \beta]$ ein $\tau(t,h)$ zwischen 0 und h mit

$$f(x + hu, t) - f(x,t) = g(h) - g(0) = h \cdot g'(\tau(t,h)) = h \cdot (D_u f)(x + \tau(t,h)u, t).$$

Wegen

$$\|(x + \tau(t,h)u, t) - (x,t)\|_2 = |\tau(t,h)| \cdot \|u\|_2 < |h| < \delta$$

folgt sodann

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}(F(x+hu) - F(x)) - \int_\alpha^\beta (D_u f)(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_\alpha^\beta \frac{1}{h}(f(x+hu,t) - f(x,t)) - (D_u f)(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_\alpha^\beta \left|\frac{1}{h} \cdot h \cdot (D_u f)(x + \tau(t,h)u, t) - (D_u f)(x,t)\right| \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \frac{\epsilon}{\beta - \alpha + 1} \,\mathrm{d}t < \epsilon,$$

womit die Existenz von $D_u F$ und die behauptete Darstellung gezeigt sind. □

Literatur

[1] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer-Verlag, Berlin 2011.