Blatt 10

A 371

zu a)

(i) ⇒ (ii)

$$(Px|y) = (Px|Py + \underbrace{(I-P)y}_{\in (I-P)(\mathcal{H}) = N(P) \text{ (s.u.)}})$$

$$\underset{P(\mathcal{H})\perp N(P)}{=} (Px|Py)$$

$$\underset{P(\mathcal{H})\perp N(P)}{=} (Px + \underbrace{(I-P)x}_{\in N(P)} | Py)$$

$$= (x|Py) \qquad \forall x,y \in \mathcal{H}$$

(ii) ⇒ (i)

Sei $y \in N(P)$ bel. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$(Px|y) = (x|Py) = (x|0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad P(\mathcal{H}) \perp N(P)$$

(i) ⇔ (iii)

$I-P$ ist stets idempotent:

$$(I-P)^2 = \underbrace{I^2}_{=I} - \underbrace{I\cdot P}_{=P} - \underbrace{P\cdot I}_{=P} + \underbrace{P^2}_{=P} = I-P$$

$$x \in N(I-P) \Leftrightarrow x = Px$$

$$\overset{!}{\Leftrightarrow} x \in P(\mathcal{H})$$

„⇒" ist offensichtlich

„⇐" Ist $x \in P(\mathcal{H})$, so existiert $y \in \mathcal{H}$ mit $Py = x$

$$\Rightarrow Px = P^2y = Py = x$$

$x \in (I-P)(\mathcal{H})$

$\iff \exists y \in \mathcal{H}: \quad y - Py = x$

$\iff \quad x \in N(P)$

"$\Rightarrow$" $\quad y - Py = x \Rightarrow Px = Py - P^2 y = Py - Py = 0$

"$\Leftarrow$" $\quad$ Sei $x \in N(P)$. Dann gilt mit $y := x$

$$y - Py = x - Px = x$$

Also:

$$N(I-P) = P(\mathcal{H})$$
$$(I-P)(\mathcal{H}) = N(P)$$

Somit:

$I - P$ ist orth. Proj.

$\iff \quad N(I-P) \perp (I-P)(\mathcal{H})$

$\iff \quad P(\mathcal{H}) \perp N(P)$

$\iff \quad P$ ist orth. Proj.

<u>zu b)</u>

<u>zu (i)</u>: $\|Px\|^2 = (Px|Px)$

$$\underset{a)}{=} (P^2x|x) = (Px|x)$$

<u>zu (ii)</u>: $\|P\| = \|P^2\| \underset{A33)a)}{\leq} \|P\| \cdot \|P\| = \|P\|^2$

$\underset{P \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{\|P\| \geq 1}}$

$\forall x \in \mathcal{H} \setminus N(P) \; (\neq \emptyset, \text{ da } P \neq 0)$:

$$\|Px\|^2 \underset{b)(i)}{=} (Px|x) = |(Px|x)|$$
$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|Px\| \cdot \|x\|$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\|Px\|}{\|x\|} = \dfrac{\|Px\|^2}{\|Px\| \cdot \|x\|} \leq 1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\|P\| \leq 1}}$

Zu c)

(i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\|Px\|^2 - \|Qx\|^2 \underset{b)(i)}{=} (Px|x) - (Qx|x)$$
$$= ((P-Q)x|x)$$
$$\underset{\substack{b)(i)\\ P-Q \text{ orth. Proj}}}{=} \|(P-Q)x\|^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \quad \|Qx\|^2 \leq \|Px\|^2 \Rightarrow \|Qx\| \leq \|Px\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sei $x \in \mathcal{H}$ bel.

$$0 \leq \|PQx - Qx\|^2 \underset{\square\text{-gl.}}{=} 2(\|PQx\|^2 + \|Qx\|^2) - \|PQx + Qx\|^2$$
$$\leq 2(\underbrace{\|P\|^2}_{\leq 1 \text{ nach } b)(ii)}\|Qx\|^2 + \|Qx\|^2) - \|PQx + Qx\|^2$$
$$\leq 4\|Qx\|^2 - \|PQx\|^2 - \|Qx\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\underbrace{(PQx|Qx)}_{\underset{b)(i)}{=} \|P(Qx)\|^2}$$
$$= 3(\|Qx\|^2 - \|PQx\|^2)$$
$$\leq 3(\|PQx\|^2 - \|PQx\|^2) = 0$$

da $\|Qx\| = \|Q(Qx)\| \underset{\substack{\text{Voraus.}\\(ii)}}{\leq} \|P(Qx)\|$

$\Rightarrow \quad \|PQx - Qx\|^2 = 0$

$\Rightarrow \quad Qx = PQx \in P(\mathcal{H})$

$\underset{x \in \mathcal{H} \text{ bel}}{\Rightarrow} \quad Q(\mathcal{H}) \subseteq P(\mathcal{H})$

„(iii) ⇒ (iv)"

$\forall y \in P(\mathcal{H}): \quad Py = y$ (siehe Seite 1 unten)

$\underset{Q(\mathcal{H}) \subseteq P(\mathcal{H})}{\Longrightarrow} \quad \forall x \in \mathcal{H}: \ PQx = Qx \ \Rightarrow PQ = Q$

„(iv) ⇒ (v)" $\quad \forall x \in \mathcal{H}:$

$$
\begin{aligned}
\| QPx - Qx \|^2 &= \| Q(Px - x) \|^2 \\
&\underset{b)(i)}{=} (Q(Px - x) \mid Px - x) \\
&= (QPx - Qx \mid Px) - (QPx - Qx \mid x) \\
&\underset{a)}{=} (P(QPx - Qx) \mid x) - (QPx - Qx \mid x) \\
&\underset{PQ=Q}{=} (QPx - Qx \mid x) - (QPx - Qx \mid x) = 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad QPx = Qx \quad \forall x \in \mathcal{H} \ \Rightarrow \quad QP = Q$

„(v) ⇒ (vi)"

$$
\begin{aligned}
\| PQx - Qx \|^2 &= ((-P + I)Qx \mid Qx) \\
&\underset{a)}{=} (Q(-P + I)Qx \mid x) \\
&\underset{QP=Q}{=} ((Q^2 - Q^2)x \mid x) = 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad PQ = Q$ (das ist gerade (iv))

Damit:

$$
\begin{aligned}
(P - Q)^2 &= P^2 + Q^2 - PQ - QP \\
&= P + Q - Q - Q = P - Q
\end{aligned}
$$

(vi) ⇒ (i):

$$
\begin{aligned}
P - Q = (P - Q)^2 &= P^2 + Q^2 - PQ - QP \\
&= P + Q - PQ - QP
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad 2Q = PQ + QP$

Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$\Big(\underbrace{(P-Q)x}_{\in (P-Q)(\mathcal{H})} \,\Big|\, \underbrace{(I-(P-Q))y}_{\in N(P-Q)} \Big)$$

$$= \underbrace{(Px \mid (I-P)y)}_{=0} + \underbrace{(Px \mid Qy)}_{\overset{a)}{=} (QPx \mid y)} - (Qx \mid y)$$

$$+ \underbrace{(Qx \mid Py)}_{\overset{a)}{=} (PQx \mid y)} - \underbrace{(Qx \mid Qy)}_{\overset{a)}{=} (Q^2 x \mid y) = (Qx \mid y)}$$

$$= (\underbrace{(QP + PQ)}_{=2Q} x \mid y) - 2(Qx \mid y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (P-Q)(\mathcal{H}) \perp N(P-Q)$$

$\square$

A381

zu a)

Klar: $\overline{LH(\mathcal{U})}^{\perp} \subseteq \mathcal{U}^{\perp}$, da $\mathcal{U} \subseteq \overline{LH(\mathcal{U})}$

Sei $x \in \mathcal{U}^{\perp}$ bel.

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \quad (x \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} \underbrace{(x \mid u_j)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \quad x \perp LH(\mathcal{U})$

Sei $u \in \overline{LH(\mathcal{U})}$ und $(u_n)_n \in LH(\mathcal{U})$ mit $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} u$

$$\Rightarrow \quad (x \mid u) = (x \mid \lim_{n \to \infty} u_n) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{(x \mid u_n)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \quad x \in \overline{LH(\mathcal{U})}^{\perp}$. Also: $\mathcal{U}^{\perp} \subseteq \overline{LH(\mathcal{U})}^{\perp}$

Sei nun $x \in (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$ und P die orth. Proj. auf $\overline{LH(\mathcal{U})}$ (längs $\overline{LH(\mathcal{U})}^{\perp}$). Dann gilt ja wegen

$$\mathcal{H} = \overline{LH(\mathcal{U})} \oplus \overline{LH(\mathcal{U})}^{\perp}, \text{ dass}$$

$(I - P)x \in \overline{LH(\mathcal{U})}^{\perp} \underset{\text{s.o.}}{=} \mathcal{U}^{\perp}$ erfüllt ist.

$$\underset{x \in (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}}{\Rightarrow} 0 = (x \mid (I - P)x) \underset{A371\,a)}{=} ((I-P)x \mid x) \underset{A371\,b)}{=} \|(I-P)x\|^2$$

$\Rightarrow (I-P)x = 0 \Rightarrow x = Px + (I-P)x = Px \in \overline{LH(\mathcal{U})}$

Ist $x \in \overline{LH(\mathcal{U})}$, so folgt aus $(\mathcal{U}^{\perp})^{\perp} = (\overline{LH(\mathcal{U})}^{\perp})^{\perp}$ und $x \perp \overline{LH(\mathcal{U})}^{\perp}$, dass $x \in (\mathcal{U}^{\perp})^{\perp}$ gilt.

Zu b)

Sei $\overline{LH(\mathcal{U})} = \mathcal{H}$.

$\underset{a)}{\Rightarrow} \quad \mathcal{U}^\perp = \overline{LH(\mathcal{U})}^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$

Sei nun $\mathcal{U}^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow \quad \underbrace{(\mathcal{U}^\perp)^\perp}_{\underset{a)}{=} \overline{LH(\mathcal{U})}} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$

Zu c)

Sei $(f_n)_n$ Folge aus V und $f \in C([-1,1])$ mit $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dann gilt

$$\|f|_{[-1,0]}\|_{L^2([-1,0])} = \left(\int_{-1}^0 |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left| \left(\int_{-1}^0 |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - \underbrace{\left(\int_{-1}^0 |f_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}_{=0} \right|$$

$$= \left| \|f|_{[-1,0]}\|_{L^2([-1,0])} - \|f_n|_{[-1,0]}\|_{L^2([-1,0])} \right|$$

$$\underset{\substack{\text{umgekehrte} \\ \Delta-\text{Ungl.}}}{\leq} \|f|_{[-1,0]} - f_n|_{[-1,0]}\|_{L^2([-1,0])}$$

$$= \left(\int_{-1}^0 |f - f_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{-1}^1 |f - f_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|f - f_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \quad \|f|_{[-1,0]}\|_{L^2([-1,0])} = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü. auf $[-1,0]$

$\underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad f \equiv 0$ auf $[-1,0]$

Beh.: $V^\perp = \{ f \in C([-1,1]) \mid f|_{[0,1]} \equiv 0 \}$

Bew. d. Beh.:

Sei $U := \{ f \in C([-1,1]) \mid f|_{[0,1]} \equiv 0 \}$

Klar: $U \subseteq V^\perp$.

Sei nun $g \in V^\perp$ bel. Wähle $f_n \in C([-1,1])$ mit

- $0 \le f_n \le 1$
- $f_n \equiv 1$ auf $[\frac{1}{n}, 1]$
- $f_n \equiv 0$ auf $[-1, \frac{1}{n+1}]$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{1}_{[0,1]}$ pktw. f. ü.

Aus $g f_n \in V$ folgt

$$0 = (g \mid g f_n) = \int_0^1 |g(x)|^2 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 |g(x)|^2\,dx$$

$|g|^2 \mathbb{1}_{[0,1]} \xleftarrow[n\to\infty]{\text{pktw. f.ü.}} |g|^2 \cdot |f_n| \le |g|^2$
Satz v. d. maj. Konv.

$\Rightarrow \| g|_{[0,1]} \|_{L^2([0,1])} = 0 \underset{g \text{ stetig}}{\Rightarrow} g|_{[0,1]} \equiv 0$

$\Rightarrow V^\perp \subseteq U$.

$\forall f \in V \oplus V^\perp : \quad f(0) = 0$

$\Rightarrow V \oplus V^\perp \subsetneqq C([-1,1])$ $\square$

Bem.: Offenkundig gilt
$V \oplus V^\perp = \{ f \in C([-1,1]) \mid f(0) = 0 \}$.

A391

zu a) Für $W = \{0\}$ ist nichts zu zeigen. Sei also $d := \dim W \geq 1$.
Sei ferner $w_1, \dots, w_d$ eine Basis von W. Sei weiter
$J := \{ j \in \{1, \dots, d\} \mid w_j \notin V \}$. Ist $J = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sonst
sei $J = \{ j_1, \dots, j_m \}$ mit einem $m \geq 1$. Dann gilt

$$V + W = V \oplus LH\{w_{j_1}, \dots, w_{j_m}\} = ((V \oplus LH\{w_{j_1}\}) \oplus LH\{w_{j_2}\}) \oplus \dots LH\{w_{j_m}\}$$

Es genügt daher, die Behauptung für den Fall $d = 1$ und $w := w_1 \notin V$ zu beweisen.

Sei nun $(x_n)_n = (\underset{\in V}{v_n} + \underset{\in \mathbb{K}}{\lambda_n} w)_n$ eine Folge aus $V \oplus LH\{w\}$ mit Grenzwert x in $\mathcal{H}$. Sei weiter $P_{V^\perp}$ die orthogonale Projektion auf $V^\perp$ (entlang V). Dann gilt

$$P_{V^\perp}(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} P_{V^\perp}(x)$$

$$\| $$

$$P_{V^\perp}(v_n + \lambda_n w) = \overbrace{P_{V^\perp}(v_n)}^{=0} + \lambda_n \cdot P_{V^\perp}(w) = \lambda_n P_{V^\perp}(w)$$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \lambda_n P_{V^\perp}(w) = P_{V^\perp}(x)$

Wegen $w \notin V$ gilt $P_{V^\perp}(w) \neq 0$. Damit folgt

$$\lambda_n = \left(\lambda_n P_{V^\perp}(w) \,\middle|\, \frac{1}{\|P_{V^\perp}(w)\|^2} P_{V^\perp}(w) \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \underbrace{\left(P_{V^\perp}(x) \,\middle|\, \frac{1}{\|P_{V^\perp}(w)\|^2} P_{V^\perp}(w) \right)}_{=: \lambda},$$

d.h. $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$. Dies liefert

$$\left. \begin{array}{l} x_n - \lambda_n w \xrightarrow[n \to \infty]{} x - \lambda w \\ \quad \| \\ \quad v_n \end{array} \right\} \overset{V \text{ abgeschl.}}{\Longrightarrow} x - \lambda w \in V$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{(x - \lambda w)}_{\in V} + \lambda w \in V + W.$$

Also ist $V + W$ abgeschlossen.

<u>alternativer Beweis</u>:

Wegen $\dim W < \infty$ gilt auch $\dim P_{V^\perp}(W) < \infty$ und daher ist $P_{V^\perp}(W)$ (nach A1) abgeschl. Teilmenge von $\mathcal{H}$.

Da $P_{V^\perp}$ stetig ist, ist dann auch

$P_{V^\perp}^{-1}(P_{V^\perp}(W))$ im $\mathcal{H}$ abgeschl.

Es gilt: $x \in P_{V^\perp}^{-1}(P_{V^\perp}(W))$ $(x \in \mathcal{H})$

$\iff P_{V^\perp}(x) \in P_{V^\perp}(W)$

$\iff \exists w \in W: \; P_{V^\perp}(x) = P_{V^\perp}(w)$

$\iff \exists w \in W: \; P_{V^\perp}(x-w) = 0$

$\iff \exists w \in W: \; x - w \in V$ (← hier geht $(V^\perp)^\perp = V$ ein, was aus A 38 a) und der Abgeschlossenheit von V folgt)

$\iff \exists w \in W: \; x \in V + w$

$\iff x \in V + W$

Also: $P_{V^\perp}^{-1}(P_{V^\perp}(W)) = W + V$.

Mithin ist $V + W$ in $\mathcal{H}$ abgeschl.

<u>zu b)</u>

Man rechnet unmittelbar nach, dass die Abbildungen

$\varphi_k : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{K}\; ; \; (x_n)_n \longmapsto x_{2k}$

und

$\psi_k : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{K}\; ; \; (x_n)_n \longmapsto x_{2k-1} - k\, x_{2k}$ $(k \in \mathbb{N})$

linear und stetig sind. Wegen

$U = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} N(\varphi_k)$ und $V = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} N(\psi_k)$

sind U und V abgeschl. UVRe von ℓ^2.

Sei $(x_n)_n \in U \cap V$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \; x_{2k} = 0$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \; x_{2k-1} = k\, x_{2k} = 0$

Also: $(x_n)_n = 0$. Damit: $U \cap V = \{0\}$.

Für $m \in \mathbb{N}$ bezeichne $e_m := (\delta_{nm})_{n=1}^{\infty}$ mit dem Kroneckerdelta δ_{nm}

Offenkundig gilt $e_m \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} + V$ für alle ungeraden $m \in \mathbb{N}$. Sei nun $m = 2k \in \mathbb{N}$ gerade. Wir betrachten $(x_n)_n$ definiert durch

$$x_n := \begin{cases} k, & n = 2k-1 \\ 1, & n = 2k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad (x_n)_n \in V$

$\Rightarrow \quad e_{2k} = (x_n)_n - k\, e_{2k-1} \in V + \mathcal{U}$

Daher: $\overline{V + \mathcal{U}} = \ell^2$

Wäre also $\mathcal{U} + V$ abgeschlossen, so müsste schon $V + W = \ell^2$ gelten. Insbesondere gäbe es ein $(x_n)_n \in \mathcal{U}$ und ein $(y_n)_n \in V$ mit $(x_n + y_n)_n = (z_n)_n$, wobei

$$z_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } 2 \nmid n, \\ \frac{2}{n}, & \text{falls } 2 \mid n. \end{cases}$$

Dann gilt für alle geraden $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{2}{n} = z_n = x_n + y_n = y_n = \frac{2}{n} y_{n-1}$$

$\Rightarrow \quad y_{n-1} = 1$

$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ungerade: $y_n = 1$

$\Rightarrow \quad (y_n)_n \notin \ell^2$ im Widerspruch zu $(y_n)_n \in V \subseteq \ell^2$ $\square$

A 401

Sei $\dim \mathcal{H} = \infty$. Dann ist z. z., dass $\mathcal{H}$ keine abz. algebr. Basis besitzt.

IA: $\mathcal{H}$ besitzt eine abzählbare algebr. Basis, etwa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Durch Anwenden des Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens erhalten wir ein ONS $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$LH\{u_1, \dots, u_n\} = LH\{x_1, \dots, x_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ $\{u_n\}_n$ ist algebr. Basis von $\mathcal{H}$.

Wir setzen $x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u_n$; wegen

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} u_n - \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} u_n \Big\|^2 \underset{\text{Pythagoras}}{=} \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n^2} \quad \forall N > M \text{ aus } \mathbb{N}$$

ist x wohldefiniert.

Da $\{u_n\}_n$ algebr. Basis von $\mathcal{H}$ ist, existieren (eindeutig bestimmte) $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ und $u_{n_1}, \dots, u_{n_k}$ mit $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_{n_j}$

$$\Rightarrow \quad (x \mid u_{n_\nu}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underbrace{(u_{n_j} \mid u_{n_\nu})}_{= \delta_{j\nu}} = \lambda_\nu$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (u_n \mid u_{n_\nu}) = \frac{1}{n_\nu} \qquad \forall \nu \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u_n = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} u_{n_j}}_{= x} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin \{n_1, \dots, n_k\}}}^{\infty} \frac{1}{n} u_n$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{n=1 \\ n\in\{n_1,\dots,n_k\}}}^{\infty} \frac{1}{n} u_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \underbrace{\Big\| \sum_{\substack{n=1 \\ n\in\{n_1,\dots,n_k\}}}^{N} \frac{1}{n} u_n \Big\|^2}_{= \sum_{\substack{n=1 \\ n\in\{n_1,\dots,n_k\}}}^{N} \frac{1}{n^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{n=1 \\ n\in\{n_1,\dots,n_k\}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad ↯$$

$$\Rightarrow \underline{IA} \text{ falsch} \Rightarrow \text{Beh} \qquad \square$$

<u>Beweisalternative</u>:

Die Menge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ sei <u>wie oben</u> gewählt. Dann ist $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein ONS, welches wegen $LH\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\} \supseteq LH\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\} = LH\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \mathcal{H}$ auch vollst. ist. Mithin ist $\mathcal{H}$ ein separabler HR und es folgt mit Riesz-Fischer: $\mathcal{H} \underset{\text{isometr.}}{\cong} \ell^2$. Da $\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ andererseits ein ONS ist, welches außerdem eine <u>algebraische</u> Basis von $\mathcal{H}$ ist, definiert

$$T: c_{00} := \{(\alpha_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n > n_0: \alpha_n = 0\} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$(\alpha_n)_n \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$$

einen isometrischen Isomorphismus $T: (c_{00}, \|\cdot\|_2) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$, woraus schließlich $(c_{00}, \|\cdot\|_2) \underset{\text{isometr.}}{\cong} (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ folgt. Wegen $\overline{c_{00}}^{\ell^2} = \ell^2 \supsetneq c_{00}$ ist $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ nicht vollst., wohingegen ℓ^2 vollst. ist. Folglich können diese nicht isomorph sein $\square$

Bonusaufgabe

Zu a) Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{-T}^{T} f_\lambda(x)\,\overline{f_\mu(x)}\,dx = \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda-\mu)x}\,dx$$

$$= \begin{cases} 2T, & \text{falls } \lambda = \mu \\ \left[\frac{1}{i(\lambda-\mu)} e^{i(\lambda-\mu)x}\right]_{-T}^{T}, & \text{falls } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2T, & \text{falls } \lambda = \mu \\ \frac{1}{i(\lambda-\mu)} \underbrace{\left(e^{i(\lambda-\mu)T} - \underbrace{e^{-i(\lambda-\mu)T}}_{= \overline{e^{i(\lambda-\mu)T}}}\right)}_{= 2i\sin((\lambda-\mu)T)}, & \text{falls } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2T, & \text{falls } \lambda = \mu \\ \frac{2}{\lambda-\mu}\sin((\lambda-\mu)T), & \text{falls } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_\lambda(x)\,\overline{f_\mu(x)}\,dx = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu \\ 0, & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

Damit: $\forall n, m \in \mathbb{N}\, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$
$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$

existiert wegen

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_{\lambda_j}(x)\right)\overline{\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k f_{\mu_k}(x)\right)}\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_j \overline{\beta_k}\, \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_{\lambda_j}(x)\,\overline{f_{\mu_k}(x)}\,dx \quad \text{der GW}$$

der GW

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_{\lambda_j}(x)\Big)\overline{\Big(\sum_{k=1}^{m} \beta_k f_{\mu_k}(x)\Big)}\, dx$$

in $\mathbb{C}$.

Mit Hilfe elementarer Grenzwertrechenregeln rechnet man nun leicht nach, dass $(\cdot|\cdot)$ eine hermitesche Sesquilinearform ist mit

$(f|f) \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $(\cdot|\cdot)$ definit ist.

Sei also $f \in \mathcal{H}$ mit $(f|f) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx = 0$$

Seien weiter $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ mit $f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_{\lambda_j}$, wobei wir die λ_j paarweise verschieden wählen

$$\Rightarrow \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_j \overline{\alpha_\nu} \underbrace{\int_{-T}^{T} f_{\lambda_j}(x)\, \overline{f_{\lambda_\nu}(x)}\, dx}_{= \begin{cases} 2T, & j=\nu \\ \frac{2}{\lambda_j - \lambda_\nu} \sin((\lambda_j - \lambda_\nu)T), & j \neq \nu \end{cases}}$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2$$

$$\Rightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \Rightarrow f = 0$$

Zu b)

$\underline{\mathrm{A}}$: $\mathcal{H}$ ist separabel

Sei $A \subseteq \mathcal{H}$ abzählbar mit $\overline{A} = \mathcal{H}$

Unsere Rechnungen aus a) zeigen, dass $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ein überabzählbares ONS in $\mathcal{H}$ ist. Insbesondere gilt nach Pythagoras für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq \mu$:

$$\|f_\lambda - f_\mu\| = \sqrt{\|f_\lambda - f_\mu\|^2} \qquad (*)$$

$$= \sqrt{\|f_\lambda\|^2 + \|-f_\mu\|^2} = \sqrt{2}.$$

Sei nun $U_\lambda := U_{\sqrt{2}/2}(f_\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wegen $\overline{A} = \mathcal{H}$ und der Offenheit von U_λ gilt:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad U_\lambda \cap A \neq \emptyset.$

Für $\lambda \neq \mu$ gilt: $\quad U_\lambda \cap U_\mu = \emptyset$. In der Tat:

$\underline{\mathrm{A}}$: $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ für gewisse $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq \mu$

Sei $f \in U_\lambda \cap U_\mu$. Dann gilt:

$$\sqrt{2} \underset{(*)}{=} \|f_\lambda - f_\mu\| \leq \|f_\lambda - f\| + \|f - f_\mu\| < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \ \lightning$$

Folglich sind auch alle Mengen $\{U_\lambda \cap A\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \quad \dot{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}}} \underbrace{(U_\lambda \cap A)}_{\neq \emptyset} \text{ ist überabzählbar}$$

Aber: $\quad \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} (U_\lambda \cap A) \subseteq A$

$$\Rightarrow \quad \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} (U_\lambda \cap A) \text{ ist auch abzählbar } \lightning$$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{A}}$ falsch $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ ist nicht separabel

$\square$

Bem.:

(i) Im Wesentlichen dasgleiche Argument wie in Teil b) liefert einen Beweis für Satz 9.12

(ii) Der Raum $\mathcal{H}$ ist nicht vollst., aber isometrisch ~~ein~~ eingebettet in den HR

$$\ell^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \sup_{\substack{F \subseteq \mathbb{R} \\ F \text{ endlich}}} \sum_{t \in F} |\varphi(t)|^2 < \infty\}$$

(wobei $\|\varphi\|_{\ell^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} := \sqrt{\sup_{\substack{F \subseteq \mathbb{R} \\ F \text{ endlich}}} \sum_{t \in F} |\varphi(t)|^2}$ für $\varphi \in \ell^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$)