Bl. # 7

A 25

zu a)

zu (i)

Ein FS der DGl

$$(*) \quad u''(t) + \lambda u(t) = 0$$

ist durch $\{\sin(\sqrt{\lambda}\, t), \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\}$ gegeben (beachte: $\lambda > 0$)

Wir setzen nun $R_j u := u(j)$ für $j \in \{0,1\}$. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_0 \sin(\sqrt{\lambda}(\cdot)) & R_0 \cos(\sqrt{\lambda}(\cdot)) \\ R_1 \sin(\sqrt{\lambda}(\cdot)) & R_1 \cos(\sqrt{\lambda}(\cdot)) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda}) & \cos(\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix}$$

$$= -\sin(\sqrt{\lambda})$$

Wegen $-\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \underset{\lambda > 0}{\Longleftrightarrow} \exists\, n \in \mathbb{N} : \lambda = n^2 \pi^2$

ist das gegebene RWP dann und nur dann eindeutig lösbar, wenn $\lambda \notin \{n^2\pi^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt ist.

zu (ii): Sei nun $\lambda \notin \{n^2\pi^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Wir setzen $u(t) := \sin(\sqrt{\lambda}\, t)$ sowie

$$v(t) := \sin(\sqrt{\lambda}(t-1)) = \sin(\sqrt{\lambda}\, t - \sqrt{\lambda})$$

$$\underset{\substack{\text{Additions-}\\\text{theoreme}}}{=} \sin(\sqrt{\lambda}\, t)\cos(\sqrt{\lambda}) - \cos(\sqrt{\lambda}\, t)\sin(\sqrt{\lambda})$$

Wegen $\sin(\sqrt{\lambda}) \neq 0$ ist dann auch $\{u, v\}$ ein FS zu $(*)$ mit $u(0) = 0$ und $v(1) = 0$.

$$[u(t)v'(t) - u'(t)v(t)]_{t=0}$$

$$= [\sin(\sqrt{\lambda}\, t)\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}(t-1)) - \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, t)\sin(\sqrt{\lambda}(t-1))]_{t=0}$$

$$= \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})$$

Die gesuchte Greensche Fkt ist also

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})}\left(\sin(\sqrt{\lambda}(t-1))\sin(\sqrt{\lambda}\,\tau)\right), & 0 \le \tau \le t \le 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})}\left(\sin(\sqrt{\lambda}(\tau-1))\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\right), & 0 \le t \le \tau \le 1 \end{cases}$$

zu b)

Wir betrachten

$$(**) \quad 0 = t\,u''(t) + u'(t) = (t\,u')'(t) = (p\,u')'(t), \quad 1 \le t \le$$

mit $p(t) := t$.

$$(t u')'(t) = 0 \iff \exists a \in \mathbb{R} : t\,u'(t) = a$$

$$\underset{t>0}{\iff} \quad \text{———}\,''\,\text{———} : u'(t) = a t^{-1}$$

$$\underset{t>0}{\iff} \exists a, b \in \mathbb{R} : u(t) = a \log(t) + b$$

$$\left.\begin{aligned} a\log(1) + b = 0 &\iff b = 0 \\ a\log(e) + b = 0 &\iff a = -b \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ das homogene RWP ist eindeutig lösbar

Somit ist durch $u(t) := \log(t)$ und $v(t) := \log(t) - 1$ ein FS zu $(**)$ mit $u(1) = 0$ und $v(e) = 0$ gegeben

$$p(t)\left(u(t)\,v'(t) - u'(t)\,v(t)\right)$$

$$= t\left(\log t \,\frac{1}{t} - \frac{1}{t}(\log t - 1)\right) = 1.$$

Die gesuchte Greensche Fkt hat somit die Gestalt

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (\log(t) - 1)\log(\tau), & 1 \le \tau \le t \le e, \\ (\log(\tau) - 1)\log(t), & 1 \le t \le \tau \le e, \end{cases}$$

A 261

zu a) Wir betrachten zunächst das lineare RWP

$$(*) \begin{cases} u''(t) - a\,u(t) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Ein FS zu $(**)$ $u''(t) - a\,u(t) = 0$ ist z.B.

$\{ e^{\sqrt{a}t}, e^{-\sqrt{a}t} \}$. Wir setzen nun

$$u(t) := e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t}$$

$$v(t) := e^{-2\sqrt{a}} e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t} = e^{\sqrt{a}(t-2)} + e^{-\sqrt{a}t}$$

Dann ist auch $\{u, v\}$ ein FS zu $(**)$ und es gilt

$$u'(t) = \sqrt{a}\, e^{\sqrt{a}t} - \sqrt{a}\, e^{-\sqrt{a}t} \Rightarrow u'(0) = 0$$

$$v'(t) = \sqrt{a}\, e^{\sqrt{a}(t-2)} - \sqrt{a}\, e^{-\sqrt{a}t} \Rightarrow v'(1) = 0$$

$$u(0)v'(0) - \underbrace{u'(0)}_{=0} v(0) = 2\sqrt{a}\,(e^{-2\sqrt{a}} - 1) =: c < 0 \quad \text{(da } a>0)$$

Die zu $(*)$ zugehörige Greensche Fkt lautet demnach

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{c}\left(e^{\sqrt{a}(t-2)} + e^{-\sqrt{a}t}\right)\left(e^{\sqrt{a}\tau} + e^{-\sqrt{a}\tau}\right), & 0 \le \tau \le t \le 1 \\ \frac{1}{c}\left(e^{\sqrt{a}(\tau-2)} + e^{-\sqrt{a}\tau}\right)\left(e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t}\right), & 0 \le t \le \tau \le 1 \end{cases}$$

(beachte: Wegen

$$\det\begin{pmatrix} u'(0) & v'(0) \\ u'(1) & v'(1) \end{pmatrix} = -u'(1)\,v'(0) = 2a\,(e^{\sqrt{a}} - e^{-\sqrt{a}})(e^{-2\sqrt{a}} - 1) \neq 0$$

ist $(*)$ eindeutig lösbar)

Wir betrachten nun die Abb

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]);\ u \mapsto \int_0^1 G(\cdot, t)\, f(t, u(t))\, dt$$

Nach Def. ist Tu die eindeutige Lsg des RWP's

$$(RWP) \begin{cases} w''(t) - a\,w(t) = f(t, u(t)) \\ w'(0) = w'(1) = 0 \end{cases}$$

Daher gilt $Tu = u$ genau dann, wenn u das Problem (3) löst.
Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz genügt es somit, nachzuweisen, dass T Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante < 1, um zu zeigen, dass (3) eindeutig lösbar ist.
Hierzu berechnen wir für $x \in [0,1]$

$$I_1(x) := \int_0^x \left(e^{\sqrt{a}(x-2)} + e^{-\sqrt{a}x}\right)\left(e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t}\right) dt$$

$$= \left(e^{\sqrt{a}(x-2)} + e^{-\sqrt{a}x}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{a}} e^{\sqrt{a}t} - \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\sqrt{a}t}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(e^{\sqrt{a}(x-2)} + e^{-\sqrt{a}x}\right)\left(e^{\sqrt{a}x} - e^{-\sqrt{a}x}\right)$$

sowie

$$I_2(x) := \int_x^1 \left(e^{\sqrt{a}(t-2)} + e^{-\sqrt{a}t}\right)\left(e^{\sqrt{a}x} + e^{-\sqrt{a}x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(e^{\sqrt{a}x} + e^{-\sqrt{a}x}\right)\left[e^{\sqrt{a}(t-2)} - e^{-\sqrt{a}t}\right]_x^1$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{a}}\left(e^{\sqrt{a}x} + e^{-\sqrt{a}x}\right)\left(e^{\sqrt{a}(x-2)} - e^{-\sqrt{a}x}\right).$$

Damit erhalten wir für $x \in [0,1]$:

$$\int_0^1 |G(x,t)|\,dt = \frac{1}{|c|}\left(I_1(x) + I_2(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2a(1-e^{-2\sqrt{a}})}\Big[\big(e^{\sqrt{a}(x-2)} + e^{-\sqrt{a}x}\big)\big(e^{\sqrt{a}x} - e^{-\sqrt{a}x}\big)$$

$$- \big(e^{\sqrt{a}x} + e^{-\sqrt{a}x}\big)\big(e^{\sqrt{a}(x-2)} - e^{-\sqrt{a}x}\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2a(1-e^{-2\sqrt{a}})}\Big[e^{2\sqrt{a}(x-1)} + 1 - e^{-2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}x}$$

$$- e^{2\sqrt{a}(x-1)} - e^{-2\sqrt{a}} + 1 + e^{-2\sqrt{a}x}\Big]$$

$$= \frac{2(1-e^{-2\sqrt{a}})}{2a(1-e^{-2\sqrt{a}})} = \frac{1}{a}$$

Für $u, v \in C([0,1])$ folgt nun

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \le \int_0^1 |G(x,t)| \cdot |f(t,u(t)) - f(t,v(t))|\, dt$$

$$\le \int_0^1 |G(x,t)|\; L\; |u(t) - v(t)|\, dt$$

$$\le \int_0^1 |G(x,t)|\; L\; \|u-v\|_\infty\, dt$$

$$= \frac{L}{a}\|u-v\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|Tu - Tv\|_\infty \le \frac{L}{a}\|u-v\|_\infty$$

Wegen $L \in (0,a)$ ist $\frac{L}{a} < 1$ und wie beschrieben folgt die Beh.

<u>zu (b)</u>

Wir betrachten $f(t,x) := -ax$. Dann gilt

$$|f(t,x) - f(t,y)| = a\,|x-y| \quad \forall\, t \in [0,1],\ x,y \in \mathbb{R}$$

Mit diesem f nimmt (3) die Form

$$\begin{cases} u''(t) - a\,u(t) = -a\,u(t) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

an. Das System (3) wird dann genau durch alle konstanten Fkt'n gelöst, ist also nicht eindeutig lösbar.

A 27 |

Wir betrachten

$$f : [\pi, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \quad (t, x) \mapsto \arctan\left(\frac{x}{1+t^2}\right)$$

Für $t \in [\pi, 2\pi]$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt nun

wegen $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, s) = \frac{1}{1+s^2} \, \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi}{1+s^2}\right)^2} \in \left(0, \frac{1}{1+\pi^2}\right] \; \forall s \in [\pi, 2\pi], \; \xi \in \mathbb{R}$

die Abschätzung

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |x-y| \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, z_t)\right| \leq \frac{1}{1+\pi^2} |x-y|$$

mit einem z_t zwischen x und y (MWS).

Wegen $\frac{\pi^2}{(2\pi - \pi)^2} = 1 > \frac{1}{1+\pi^2}$ hat das vorgelegte RWP nach dem Satz von Lettenmeyer (und der anschließenden Bemerkung) genau eine Lösung.

A 2 8

Wenn überhaupt eine Lsg zu (5) existiert, so ist diese eindeutig. Sind nämlich u, v Lösungen zu (5), so löst $u-v$ das System (5) mit rechter Seite $f \equiv 0$. Da aber das Cauchyproblem für die Wellengleichung laut Vorlesung eindeutig lösbar ist, folgt $u - v = 0$ und daher $u = v$ (denn 0 ist die einzige Lsg von (5) mit rechter Seite $f \equiv 0$).

Wir zeigen nun noch, dass die Fkt

$$u(t,x) := \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi \right) d\tau$$

das System (5) löst. Um u zu differenzieren benutzen wir die Leibnizregel zur Differentiation parameterabhängiger Integrale. Zuvor beachten wir jedoch das Folgende.

Ist $\rho : \mathbb{R} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und ist $\rho(\cdot, t)$ für alle $t \geq 0$ diff'bar und ist die hierdurch gegebene Abb

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} : \mathbb{R} \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (x,t) \longmapsto \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t)$$

stetig, so ist die Abb.

$$\tilde{\rho} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (x,t) \longmapsto \begin{cases} \rho(x,t), & t \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \rho(x,0), & t < 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

stetig und bzgl. der ersten Variablen stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t), & t \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,0), & t < 0,\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} = \widetilde{\frac{\partial \rho}{\partial x}}(x,t)$$

und erfüllt natürlich $\tilde{\rho}|_{\mathbb{R}\times[0,\infty)} = \rho$.

Indem wir also f durch $\tilde{f}$ ersetzen, dürfen wir o.B.d.A.

annehmen, dass f selbst eine auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierte stetig Fkt ist, die bzgl. der ersten Variablen stetig diff'bar ist.

Für festes $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir nun die Abb.

$$\varphi_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} ; \quad (t, \tau) \longmapsto \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi$$

Dann ist $\varphi_x \in C(\mathbb{R}^2)$ und nach dem HS gilt

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t}(t,\tau) = c\Big(f(x+c(t-\tau), \tau) + f(x - c(t-\tau), \tau)\Big)$$

sowie $\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \in C(\mathbb{R}^2)$. Nach der Leibnizregel ist dann

$$\Phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; \quad t \longmapsto \frac{1}{2c} \int_0^t \varphi_x(t,\tau)\, d\tau$$

differenzierbar mit

$$\Phi_x'(t) = \frac{1}{2c}\Big(\int_0^t \frac{\partial \varphi_x}{\partial t}(t,\tau)\, d\tau + \varphi_x(t,t) \cdot 1 - 0 \Big)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{f(x+c(t-\tau),\tau) + f(x-c(t-\tau),\tau)}_{=: \Psi_x(t,\tau)}\, d\tau$$

Die auf $\mathbb{R}^2$ definierte Fkt Ψ_x ist stetig und bzgl. t stetig partiell diff'bar mit

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial t}(t,x) = c\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-c(t-\tau),\tau)\Big).$$

Wiederum nach der Leibnizregel ist dann Φ_x' diff'bar mit

$$\Phi_x''(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial \Psi_x}{\partial t}(t,\tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\Psi_x(t,t)$$

$$= \frac{c}{2} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-c(t-\tau),\tau)\, d\tau + f(x,t)$$

Für festes $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Fkt

$$\lambda_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,\tau) \longmapsto \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi$$

Es ist $\lambda_t \in C(\mathbb{R}^2)$ und λ_t ist nach dem HS bzgl. x stetig partiell diff'bar mit

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial x}(x,\tau) = f(x+c(t-\tau),\tau) - f(x-c(t-\tau),\tau)$$

Die Leibnizregel liefert daher, dass die Abb

$$\Lambda_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \longmapsto \frac{1}{2c}\int_0^t \lambda_t(x,\tau)\, d\tau$$

diff'bar ist mit

$$\Lambda_t'(x) = \frac{1}{2c}\int_0^t \frac{\partial \lambda_t}{\partial x}(x,\tau)\, d\tau + \frac{1}{2c}\underbrace{\lambda_t(x,t)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2c}\int_0^t \underbrace{f(x+c(t-\tau),\tau) - f(x-c(t-\tau),\tau)}_{=:\, \mu_t(x,\tau)}\, d\tau$$

Es ist $\mu_t \in C(\mathbb{R}^2)$ und μ_t ist stetig partiell diff'bar bzgl. x mit $\frac{\partial \mu_t}{\partial x}(x,\tau) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-c(t-\tau),\tau)$.

Wiederum nach Leibniz ist Λ_t' diff'bar mit

$$\Lambda_t''(x) = \frac{1}{2c}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-c(t-\tau),\tau)\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{2c}\underbrace{\mu_t(x,t)}_{=0}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für das von uns betrachtete u die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existieren mit

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial t)^2}(x,t) = \Phi_x''(t) = \frac{c}{2}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-c(t-\tau),\tau)\,d\tau$$

$$+ f(x,t)$$

$$= c^2 \Lambda_t''(x) + f(x,t)$$

$$= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t)$$

Ferner ist die Abb

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,t) \longmapsto \frac{c}{2}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-c(t-\tau),\tau)\,d\tau$$

stetig. Überdies ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Phi_x'(t) = \frac{1}{2}\int_0^t f(x+c(t-\tau),\tau) + f(x-c(t-\tau),\tau)\,d\tau$$

bzgl x diff'bar (vgl. Argument für die Diff'barkeit von Λ_x') mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\cdot\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau) + \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau)\,d\tau + f(x,t),$$

was in (x,t) stetig ist.

Analog folgt, dass auch $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$ existiert und stetig ist (alternativ kann man dies auch mit dem Satz von H.A. Schwarz zeigen, indem man beachtet, dass $\frac{\partial u}{\partial t}$ und
$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \Lambda_t'(x) = \frac{1}{2c}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+c(t-\tau),\tau)\,d\tau$
stetig sind).

Also ist u eine C^2-Fkt mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \qquad (x,t)\in\Omega.$$

Zudem gilt $u(x,0) = 0$ (offensichtlich) sowie
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \Phi_x'(0) = 0$ (klar). Mithin löst u das Problem (5).