Aufgabe 13.

a) Bestimmen Sie jeweils ein nichtkonstantes erstes Integral für die folgenden Differentialgleichungssysteme.

(i) $x'(t) = x^2(t)\mathrm{e}^{y(t)} + 1$, $y'(t) = 1 - 2x(t)\mathrm{e}^{y(t)}$.

(ii) $x'(t) = 2x^2(t) + 3x^3(t)y(t)$, $y'(t) = -3x(t)y(t) - 4x^2(t)y^2(t)$.

(*Hinweis: Versuchen Sie einen Ansatz der Form* $\lambda(x, y) = \mu(x \cdot y)$ *mit einem geeigneten* μ.)

b) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{R}$, für welche das Differentialgleichungssystem $x'(t) = x(t)$, $y'(t) = ky(t)$ ein nichtkonstantes erstes Integral besitzt.

(*Hinweis: Betrachten Sie* $\lambda(x, y) = x^{1-2k}y^{\frac{k-2}{k}}$ *für* $k < 0$.)

Lösungsvorschlag. Für das prinzipielle Vorgehen, das dem folgenden Lösungsvorschlag zugrunde liegt, verweisen wir auf das Zusatzmaterial.

zu a) (i): Der Ansatz

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda h) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g)$$

mit $g(x, y) = x^2\mathrm{e}^y + 1$ und $h(x, y) = 1 - 2x\mathrm{e}^y$ und einer zu bestimmenden, von der Nullfunktion verschiedenen $\mathcal{C}^1$-Funktion $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ führt zu der Gleichung

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial y}(x, y)(1 - 2x\mathrm{e}^y) - \lambda(x, y)(-2x\mathrm{e}^y) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}(x, y)(x^2\mathrm{e}^y + 1) + \lambda(x, y)2x\mathrm{e}^y,$$

die wir mit $\lambda \equiv 1$ erfüllen können. Damit ist die Existenz eines nichtkonstanten ersten Integrals für die gegebene Differentialgleichung gesichert.

Wir versuchen nun, ein erstes Integral H von der Form

$$H(x, y) = x^2\mathrm{e}^y + y + c(x)$$

mit einer $\mathcal{C}^1$-Funtion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu finden.[1] Für c ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$2x\mathrm{e}^y - 1 = -h(x, y) = -\lambda(x, y)h(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = 2x\mathrm{e}^y + c'(x),$$

die z.B. mit $c(x) := -x$ erfüllt ist. Somit ist also durch

$$H(x, y) = x^2\mathrm{e}^y + y - x$$

ein nichtkonstantes erstes Integral für die gegebene Differentialgleichung erklärt.

zu a) (ii): Wir gehen ganz ähnlich wie eben vor. Wir machen den Ansatz

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda h) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g)$$

mit $g(x, y) = 2x^2 + 3x^3y$ und $h(x, y) = -3xy - 4x^2y^2$ und einer zu bestimmenden, von der Nullfunktion verschiedenen $\mathcal{C}^1$-Funktion $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

[1] Beachte: $\frac{\partial}{\partial y}(x^2\mathrm{e}^y + y) = g(x, y) = \lambda(x, y)g(x, y)$

$\mu(xy) = \lambda(x,y)$ existiere. Dieser Ansatz führt zu der Gleichung

$$-\mu'(xy)x(-3xy - 4x^2y^2) - \mu(xy)(-3x - 8x^2y) = \mu'(xy)y(2x^2 + 3x^3y) + \mu(xy)(4x + 9x^2y),$$

von der man nach einigen einfachen Umformungen einsieht, dass sie zu der Gleichung

$$\mu'(xy)xy(x + x^2y) = \mu(xy)(x + x^2y)$$

äquivalent ist. Diese letzte Gleichung ist sicherlich dann erfüllt, wenn $\mu'(xy)xy = \mu(xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Wir versuchen daher μ als Lösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung

$$\mu'(t)t = \mu(t)$$

zu finden. Etwa durch scharfes Hinsehen[2] findet man die nichttriviale Lösung $\mu(t) = t$. Folglich wählen wir $\lambda(x,y) := xy$ und haben die Existenz eines nichtkonstanten ersten Integrals für die gegebene Differentialgleichung gesichert.

Wir versuchen nun, ein erstes Integral H von der Form

$$H(x,y) = x^3y^2 + x^4y^3 + c(x)$$

mit einer $\mathcal{C}^1$-Funtion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu finden.[3] Für c ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$-xy(-3xy - 4x^2y^2) = -\lambda(x,y)h(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = xy(3xy + 4x^2y^2) + c'(x),$$

die z.B. von $c \equiv 0$ gelöst wird. Somit ist also durch

$$H(x,y) = x^3y^2 + x^4y^3$$

ein nichtkonstantes erstes Integral für die gegebene Differentialgleichung erklärt.

zu b): Wir unterscheiden hier verschiedene Fälle. Im Folgenden sei $f(x,y) := (x, ky)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Fall: $k > 0$. Jede Lösung des Differentialgleichungssystems $x'(t) = x(t)$, $y'(t) = ky(t)$ hat die Form $(x(t), y(t)) = (a\mathrm{e}^t, b\mathrm{e}^{kt})$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Sei nun $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ irgendein erstes Integral zu diesem System. Nach Satz 3.1 aus der Vorlesung existiert dann für alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ein $c_{a,b} \in \mathbb{R}$ dergestalt, dass $H(a\mathrm{e}^t, b\mathrm{e}^{kt}) = c_{a,b}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Da $k > 0$ gilt, erhalten wir $\lim_{t\to\infty}(a\mathrm{e}^t, b\mathrm{e}^{kt}) = (0,0)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und folglich einerseits $\lim_{t\to\infty} H(a\mathrm{e}^t, b\mathrm{e}^{kt}) = H(0,0)$. Andererseits hat man jedoch offenkundig $\lim_{t\to\infty} H(a\mathrm{e}^t, b\mathrm{e}^{kt}) = c_{a,b}$. Beides zusammen liefert $H(a\mathrm{e}^t, b\mathrm{e}^{kt}) = H(0,0)$ für alle $a, b, t \in \mathbb{R}$. Wegen $\{(a\mathrm{e}^t, b\mathrm{e}^{kt});\ a, b, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ impliziert dies, dass H konstant ist.

2. Fall: $k = 0$. Ist $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ beliebig, dann ist durch $H(x,y) := F(y)$ ein erstes Integral gegeben, denn es gilt dann

$$((\nabla H)(x,y)|f(x,y)) = ((0, F'(y))|(x,0)) = 0$$

[2] oder durch Trennung der Variablen oder mit Hilfe der Lösungstheorie für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

[3] Beachte: $\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + x^4y^3) = xy(2x^2 + 3x^3y) = \lambda(x,y)g(x,y)$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für nichtkonstantes F erhält man dann auch ein nichtkonstantes H.

3. Fall: $k < 0$. Wegen $k < 0$ ist die Funktion

$$\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x,y) \mapsto x^{1-2k} y^{1-\frac{2}{k}}$$

stetig differenzierbar. Mit $g(x,y) = x$ und $h(x,y) = ky$ verifiziert man jetzt sehr leicht, dass

$$\frac{\partial}{\partial y}(-\lambda h) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda g)$$

erfüllt ist. Damit ist (da weder λh noch λg die Nullfunktion ist) bereits die Existenz eines nichtkonstanten ersten Integrals gesichert und die Aufgabe somit gelöst. Um dann noch konkret ein erstes nichtkonstantes Integral zu berechnen, verfolgen wir den Ansatz

$$H(x,y) = \frac{k}{2(k-1)} x^{2(1-k)} y^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)} + c(x)$$

mit einer $\mathcal{C}^1$-Funtion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.[4] Als Bestimmungsgleichung für c ergibt sich dann

$$-x^{1-2k} y^{1-\frac{2}{k}} ky = \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = -kx^{1-2k} y^{2-\frac{2}{k}} + c'(x),$$

welche z.B. mit $c \equiv 0$ erfüllt ist. Somit ist also durch

$$H(x,y) = \frac{k}{2(k-1)} x^{2(1-k)} y^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$

ein nichtkonstantes erstes Integral für das gegebene Differentialgleichungssystem erklärt.

Zusammenfassend erhalten wir somit, dass genau dann ein nichtkonstantes erstes Integral existiert, wenn $k \leq 0$ gilt. $\square$

[4]Beachte: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{2(k-1)} x^{2(1-k)} y^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)}\right) = x^{2-2k} y^{1-\frac{2}{k}} = x^{1-2k} y^{1-\frac{2}{k}} \cdot x = \lambda(x,y) g(x,y)$

Aufgabe 15. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von dem Parameter $c \in \mathbb{R}$) alle Equilibria der folgenden Differentialgleichungen und untersuchen Sie diese jeweils auf Stabilität und asymptotische Stabilität.

a) $x''(t) + c^2 x(t) = 0$
b) $x'(t) = -(1 + x(t))(x^2(t) - c)$
c) $x'(t) = f(x(t))$, wobei $f(0) := 0$ und $f(x) := x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lösungsvorschlag. zu a): Mit $y(t) := x'(t)$ schreibt sich die Differentialgleichung äquivalent als

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -c^2 x(t). \end{cases} \tag{1}$$

Wir setzen $f(x, y) := (y, -c^2 x)$ und unterscheiden bei der Untersuchung der Equilibria zwei Fälle.

1. Fall: $c \neq 0$. Dann besitzt (1) ausschließlich den stationären Punkt $(0, 0)$. Alle Lösungen zu (1) sind in dieser Situation durch

$$(x(t), y(t)) = (a \sin(ct) + b \cos(ct), ca \cos(ct) - cb \sin(ct)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Gilt $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$, so ist notwendigerweise $b = x_0$ und $a = \frac{y_0}{c}$. Wir erhalten damit

$$|x(t)| = \left| \frac{y_0}{c} \sin(ct) + x_0 \cos(ct) \right| \leq \frac{|y_0|}{|c|} + |x_0| \leq \max\left\{1, \frac{1}{|c|}\right\} \|(x_0, y_0)\|_1$$

sowie

$$|y(t)| = |y_0 \cos(ct) - x_0 c \sin(ct)| \leq |y_0| + |c||x_0| \leq \max\{1, |c|\} \|(x_0, y_0)\|_1$$

und daher auch

$$\|(x(t), y(t))\|_1 \leq \max\left\{|c|, \frac{1}{|c|}\right\} \|(x_0, y_0)\|_1$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, was sofort die Stabilität von $(0, 0)$ nach sich zieht.

Wir betrachten nun speziell Lösungen mit $y_0 = 0$. Dann gilt

$$(x(t), y(t)) = (x_0 \cos(ct), -cx_0 \sin(ct)).$$

Wäre nun $(0, 0)$ asymptotisch stabil, so gäbe es insbesondere ein $\delta > 0$ mit

$$\lim_{t \to \infty} (x_0 \cos(ct), -cx_0 \sin(ct)) = (0, 0)$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x_0| < \delta$. Für $|x_0| > 0$ existiert (wegen $c \neq 0$) aber nicht einmal einer der Grenzwerte $\lim_{t \to \infty} x_0 \cos(ct)$ oder $\lim_{t \to \infty} -cx_0 \sin(ct)$. Demnach kann $(0, 0)$ nicht asymptotisch stabil sein.

2. Fall: $c = 0$. In diesem Falle ist $\{(a, 0);\ a \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller stationären Punkte. Jede Lösung zu (1) hat nun die Gestalt

$$(x(t), y(t)) = (\alpha t + \beta, \alpha)$$

für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und jede solche Funktion ist auch eine Lösung. Sei nun $a \in \mathbb{R}$ fixiert. Wir zeigen, dass $(a, 0)$ instabil ist. Wäre $(a, 0)$ nämlich stabil, so gäbe es insbesondere ein $\delta > 0$ derart, dass für jede Lösung $(x(t), y(t))$ von (1) mit $\|(x(0), y(0)) - (a, 0)\|_2 < \delta$ immer schon

$$\|(x(t), y(t)) - (a, 0)\|_2 < 1 \tag{2}$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Wir wählen nun $\beta = a$ und $\alpha \in (0, \delta)$. Dann gilt einerseits

$$\|(x(0), y(0)) - (a, 0)\|_2 = |\alpha| < \delta$$

und andererseits

$$\lim_{t\to\infty} \|(x(t), y(t)) - (a, 0)\|_2 = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\alpha^2(t^2 + 1)} = \infty,$$

im Widerspruch zu (2). Mithin kann $(a, 0)$ nicht stabil sein.

zu b): Mit $f_c(x) := -(1 + x)(x^2 - c)$ schreibt sich die gegebene skalare Differentialgleichung als $x'(t) = f_c(x(t))$. Nach Aufgabe 14 wird das Stabilitätsverhalten allein durch die Vorzeichenverteiung der Funktion f_c bestimmt. Da alle Nullstellen von f_c isoliert sind, liegt genau dann asymptotische Stabilität bei einer Nullstelle von f_c vor, wenn dort ein Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ stattfindet. In allen übrigen Fällen liegt bei einer solchen Nullstelle eine instabile Gleichgewichtslösung vor.

Ist $c < 0$, so ist -1 die einzige Nullstelle von f_c mit einem Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ, also asymptotisch stabil.

Für $c \geq 0$ sind -1, $\sqrt{c}$ und $-\sqrt{c}$ sämtliche Nullstellen, von denen je zwei für $c \in \{0, 1\}$ zusammenfallen.

Für $c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ findet daher bei allen Nullstellen ein Vorzeichenwechsel statt. Wegen $\lim_{x\to\pm\infty} f_c(x) = \mp\infty$ ist in diesem Falle die Abfolge der Vorzeichen (von links nach rechts) $+, -, +, -$, so dass die kleinste und die größte Nullstelle jeweils eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung liefert, wohingegen die verbleibende Nullstelle zu einem instabilen Equilibrium führt.

Ist $c \in \{0, 1\}$ und ist x_0 die einzige einfache Nullstelle, so weist f_c dasgleiche Vorzeichenverhalten wie die durch $g(x) := -(x - x_0)$ definierte Funktion auf. Insbesondere ist dann x_0 eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung, während das zur doppelten Nullstelle zugehörige Equilibrium instabil sein muss.

In der nachfolgenden Tabelle sind nun alle möglichen Fälle zusammengefasst dargestellt.

Parameterwert	Equilibria	asymptotisch stabile Equilibria	instabile Equilibria
$c = 0$	$-1, 0$	-1	0
$0 < c < 1$	$-1, \sqrt{c}, -\sqrt{c}$	$-1, \sqrt{c}$	$-\sqrt{c}$
$c = 1$	$1, -1$	1	-1
$c > 1$	$-1, \sqrt{c}, -\sqrt{c}$	$\sqrt{c}, -\sqrt{c}$	-1
$c < 0$	-1	-1	///

zu c): Da f eine stetig differenzierbare (und daher lokal Lipschitz-stetige) Funktion ist, ist Aufgabe 14 wieder anwendbar und wir studieren abermals die Vorzeichenverteilung der Funktion f, um das Stabilitätsverhalten der stationären Punkte der Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ zu bestimmen.

Die Menge aller Equilibria ist präzise die Menge

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\pi n};\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Da sich 0 sowohl von links als auch von rechts durch Nullstellen der Funktion f approximieren lässt, ist 0 nach Aufgabe 14) b) und d) stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Alle übrigen Nullstellen sind isoliert. Daher liegt bei diesen genau dann asymptotische Stabilität, wenn sich dort ein Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ vollzieht. In allen übrigen Fällen liegt bei diesen Nullstellen eine instabile Gleichgewichtslösung vor.

Ist nun $\frac{1}{2\pi n} < x < \frac{1}{(2n-1)\pi}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt $2\pi n > \frac{1}{x} > (2n-1)\pi$ und somit $\sin(x^{-1}) < 0$ und daher auch (wegen $x > 0$) $f(x) < 0$. Entsprechend erhält man für $\frac{1}{(2n+1)\pi} < x < \frac{1}{2n\pi}$ mit einem $n \in \mathbb{N}$, dass $f(x) > 0$ gilt.

Ist jetzt $\frac{1}{-2\pi n} < x < \frac{1}{-(2n+1)\pi}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\frac{1}{2\pi n} > -x > \frac{1}{(2n+1)\pi}$ und daher nach dem schon Gezeigten $0 < f(-x) = f(x)$. Analog erhält man für $\frac{1}{-(2n-1)\pi} < x < \frac{1}{-2n\pi}$ mit einem $n \in \mathbb{N}$, dass $f(x) < 0$ gilt. Ferner gilt für $x < \frac{1}{-\pi}$, wie man leicht bestätigt, $f(x) > 0$.

Damit ergibt sich, dass

$$\left\{ \frac{1}{2\pi n};\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{-(2n+1)\pi};\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

die Menge der asymptotisch stabilen Gleichgewichtslösungen und

$$\left\{ \frac{1}{-2\pi n};\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{(2n+1)\pi};\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

die Menge aller instabilen stationären Punkte ist. $\square$

Aufgabe 16. Es sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ die von der euklidischen Norm gemäß Aufgabe 4 a) induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{d\times d}$ und $X(\cdot)$ eine Fundamentalmatrix für das lineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $S \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertierbar, so ist 0 genau dann für das lineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t)$ stabil bzw. asymptotisch stabil, wenn 0 für das System $y'(t) = S^{-1}ASy(t)$ stabil bzw. asymptotisch stabil ist.
b) Genau dann ist 0 stabil, wenn $\sup_{t\geq 0} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} < \infty$ erfüllt ist.
c) Dann und nur dann ist 0 asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t\to\infty} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} = 0$ gilt.

1. Lösungsvorschlag zu Teil a). In dieser Lösung arbeiten wir nur mit den Defintionen von "stabil" und "asymptotisch stabil".

Wir setzen zunächst einmal $Y(t) := S^{-1}X(t)S$ für $t \in \mathbb{R}$ sowie $B := S^{-1}AS$. Dann gilt für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ mit $t \neq t_0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-t_0}(Y(t) - Y(t_0)) = S^{-1}\left(\frac{1}{t-t_0}(X(t) - X(t_0))\right) S \xrightarrow[t\to t_0]{} & S^{-1}X'(t)S \\ =& S^{-1}AX(t)S = S^{-1}AS \cdot S^{-1}X(t)S \\ =& BY(t)\end{aligned}$$

Folglich ist Y differenzierbar mit $Y'(t) = BY(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. Y ist eine Lösungsmatrix für das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = By(t)$. Ferner gilt $\det(Y(t)) = \det(X(t)) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, womit Y sogar als Fundamentalmatrix für das eben angegebene System erkannt ist. Die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

bzw. des Problems

$$\begin{cases} y'(t) = By(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

ist nun durch $X(t)X(0)^{-1}x_0$ bzw. $Y(t)Y(0)^{-1}y_0$ gegeben.

Sei nun 0 stabiles Equilibrium für $x'(t) = Ax(t)$. Dann gilt laut Defintion

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x_0 \in U_\delta(0)\ \forall\, t \geq 0 :\ \|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 < \epsilon.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig, $\delta > 0$ wie vor für $\frac{\epsilon}{\|S^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$ gewählt und sei $\rho := \frac{\delta}{\|S\|_{\mathrm{op}}}$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\|Y(t)Y(0)^{-1}y_0\|_2 = \|S^{-1}X(t)S \cdot S^{-1}X(0)Sy_0\|_2 &\leq \|S^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|X(t)X(0)^{-1}Sy_0\|_2 \\ &< \|S^{-1}\|_{\mathrm{op}}\frac{\epsilon}{\|S^{-1}\|_{\mathrm{op}}} = \epsilon\end{aligned}$$

für alle $y_0 \in U_\rho(0)$ und alle $t \geq 0$, da ja in diesem Falle $\|Sy_0\|_2 \leq \|S\|_{\mathrm{op}}\|y_0\|_2 < \delta$ gilt. Folglich ist 0 auch für $y'(t) = By(t)$ stabil.

Wenn wir nun umgekehrt voraussetzen, dass 0 für $y'(t) = By(t)$ stabil, so erhalten wir, indem wir das gerade Gezeigte anwenden, dass 0 für das System $z'(t) = (S^{-1})^{-1}B(S^{-1})z(t)$, also präzise für $x'(t) = Ax(t)$, stabil ist.

Nun setzen wir voraus, dass 0 asymptotisch stabiles Equilibrium für $x'(t) = Ax(t)$ ist. Nach dem schon Bewiesenen ist 0 dann auch für das System $y'(t) = By(t)$ stabil und wie eben erhalten wir die Abschätzung

$$\|Y(t)Y(0)^{-1}y_0\|_2 \leq \|S^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|X(t)X(0)^{-1}Sy_0\|_2 \tag{5}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Nach Definition gilt insbesondere

$$\exists\ \delta > 0\ \forall\ x_0 \in U_\delta(0) :\ \lim_{t\to\infty} \|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 = 0.$$

Ist nun $\|y_0\| < \frac{\delta}{\|S\|_{\mathrm{op}}}$, so ist $\|Sy_0\|_2 \leq \delta$, und der Grenzübergang $t \to \infty$ in der Ungleichung (5) liefert $\lim_{t\to\infty} \|Y(t)Y(0)^{-1}y_0\|_2 = 0$ und wir erkennen somit, dass 0 auch für $y'(t) = By(t)$ asymptotisch stabil ist.

Die umgekehrte Implikation führt man wie eben im Falle der Stabilität wieder auf das schon Gezeigte zurück. □

Alternativ kann man aber auch die Teile b) und c) zur Lösung von Teil a) heranziehen.

2. Lösungsvorschlag zu Teil a). Mit den Bezeichnung aus dem ersten Lösungsvorschlag gilt

$$\|Y(t)\|_{\mathrm{op}} = \|S^{-1}X(t)S\|_{\mathrm{op}} \leq \|S^{-1}\|_{\mathrm{op}} \cdot \|X(t)\|_{\mathrm{op}} \cdot \|S\|_{\mathrm{op}}$$

sowie

$$\|X(t)\|_{\mathrm{op}} = \|SY(t)S^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq \|S\|_{\mathrm{op}} \cdot \|Y(t)\|_{\mathrm{op}} \cdot \|S^{-1}\|_{\mathrm{op}},$$

woraus die Behauptung unmittelbar mit Hilfe von Teil a) und b) folgt. □

Nun sind noch die Aufgabenteile b) und c) zu bearbeiten.

Lösungsvorschlag zu Teil b) und c). Ist 0 stabil, so existiert insbesondere ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\forall\ x_0 \in U_\delta(0)\ \forall\ t \geq 0 :\ \ \|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 \leq 1$$

erfüllt ist. Für alle $t \geq 0$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ folgt sodann

$$\begin{aligned} \frac{\|X(t)X(0)^{-1}x_0\|}{\|X(0)^{-1}x_0\|_2} &= \left\| X(t)X(0)^{-1}\left(\frac{1}{\|X(0)^{-1}x_0\|_2}x_0\right)\right\|_2 \\ &= \frac{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}}{\delta}\left\| X(t)X(0)^{-1}\left(\frac{\delta}{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}}X(0)\frac{1}{\|X(0)^{-1}x_0\|_2}X(0)^{-1}x_0\right)\right\|_2, \end{aligned}$$

woraus sich wegen

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\delta}{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}}X(0)\frac{1}{\|X(0)^{-1}x_0\|_2}X(0)^{-1}x_0\right\|_2 &\leq \frac{\delta}{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}} \cdot \|X(0)\|_{\mathrm{op}} \left\|\frac{1}{\|X(0)^{-1}x_0\|_2}X(0)^{-1}x_0\right\|_2 \\ &= \frac{\delta}{2} < \delta \end{aligned}$$

schließlich

$$\frac{\|X(t)X(0)^{-1}x_0\|}{\|X(0)^{-1}x_0\|_2} \leq \frac{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}}{\delta}$$

ergibt. Dies impliziert nun

$$\|X(t)\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{\|X(t)X(0)^{-1}x_0\|}{\|X(0)^{-1}x_0\|_2} \leq \frac{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}}{\delta}$$

für alle $t \geq 0$ und daher auch

$$\sup_{t\geq 0} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} < \infty.$$

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, dass $M := \sup_{t\geq 0} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} < \infty$ erfüllt ist. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und sei $\delta := \frac{\epsilon}{M\|X(0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$. Dann gilt

$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0\| \leq \|X(t)\|_{\mathrm{op}}\|X(0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|x_0\|_2 < M\|X(0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\delta = \epsilon$$

für alle $x_0 \in U_\delta(0)$ und alle $t \geq 0$. Mithin ist 0 stabil.

Es gelte nun $\lim_{t\to\infty} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} = 0$. Dann gilt insbesondere $M = \sup_{t\geq 0} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} < \infty$, womit 0 gemäß dem Obigen schon einmal als stabil erkannt ist. Ferner liefert die Abschätzung

$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 \leq \|X(t)\|_{\mathrm{op}}\|X(0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|x_0\|_2 \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

dass 0 sogar asymptotisch stabil ist.

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nun nur noch aus der asymptotischen Stabilität die Beziehung $\lim_{t\to\infty} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} = 0$ herleiten. Hierzu nehmen wir an, dass 0 asymptotisch stabil ist und dass zugleich die Bedingung "$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} = 0$" verletzt ist, und wollen diese Annahme zu einem Widerspruch führen.

Unter dieser Prämisse gibt es jedenfalls eine gegen ∞ konvergente Folge $(t_n)_n$ in $(0,\infty)$, welche zudem $m := \inf_{n\in\mathbb{N}} \|X(t_n)\|_{\mathrm{op}} > 0$ erfüllt. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir nun ein $x_n \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x_n\|_2 = 1$ dergestalt, dass $\|X(t_n)x_n\|_2 = \|X(t_n)\|_{\mathrm{op}}$ erfüllt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß dürfen wir hierbei ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge $(x_n)_n$ gegen ein $x \in \mathbb{R}^d$ konvergiert. Da 0 asymptotisch stabil, also erst recht stabil ist, wissen wir bereits, dass $M = \sup_{t\geq 0} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} < \infty$ erfüllt ist und dass

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x_0 \in U_\delta(0): \ \lim_{t\to\infty} \|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 = 0.$$

gilt. Wir setzen nun $\widetilde{x} := \frac{\delta}{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}}X(0)x$. Damit erhalten wir nun unter Beachtung von $\|\widetilde{x}\|_2 \leq \frac{\delta}{2} < \delta$ den Widerspruch

$$\begin{aligned} 0 < m \leq \|X(t_n)x_n\|_2 &\leq \|X(t_n)(x_n - x)\|_2 + \|X(t_n)x\|_2 \\ &\leq \|X(t_n)\|_{\mathrm{op}}\|x_n - x\| + \frac{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}}{\delta}\|X(t_n)X(0)^{-1}\widetilde{x}\|_2 \\ &\leq M\|x_n - x\| + \frac{2\|X(0)\|_{\mathrm{op}}}{\delta}\|X(t_n)X(0)^{-1}\widetilde{x}\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Folglich war unsere Annahme falsch und es gilt $\lim_{t\to\infty} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} = 0$ wie behauptet. $\square$

Bemerkung. Wir wollen noch ein paar beachtenswerte Punkte hervorheben.

a) Ist x_0 ein Equilibrium einer autonomen Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ mit lokal Lipschitz-stetiger rechter Seite, so nennt man x_0 *attraktiv* oder *anziehend*, falls
$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, \xi \in U_\delta(0) :\ \omega_+(\xi) = \infty \text{ und } \lim_{t\to\infty} u(t\,;\xi) = x_0$$
erfüllt ist, wobei $u(\cdot\,;\xi)$ die nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems
$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$
und $\omega_+(\xi)$ deren maximale rechte Existenzzeit bezeichne. Im allgemeinen braucht ein attraktives Equilibrium *nicht* stabil zu sein, d.h. aus Attraktivität kann man *nicht* die asymptotische Stabilität folgern (die umgekehrte Implikation ist jedoch offenkundig immer richtig).

Doch für lineare Systeme ist die Situation anders gelagert: Hier zieht die Attraktivität von 0 in der Tat die asymptotische Stabilität von 0 nach sich! Gilt nämlich
$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x_0 \in U_\delta(0) :\ \lim_{t\to\infty} \|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 = 0.$$
So folgt
$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 = \frac{2\|x_0\|_2}{\delta} \left\| X(t)X(0)^{-1}\left(\frac{\delta}{2\|x_0\|_2}x_0\right)\right\|_2 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$
für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Wäre nun $\sup_{t\geq 0} \|X(t)\|_{\mathrm{op}} = \infty$, so fände sich eine Folge $(t_n)_n$ in $(0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|X(t_n)\|_{\mathrm{op}} = \infty$. Wir wählen nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x_n\|_2 = 1$ dergestalt, dass $\|X(t_n)x_n\|_2 = \|X(t_n)\|_{\mathrm{op}}$ erfüllt ist, und wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass $(x_n)_n$ gegen ein $x \in \mathbb{R}^d$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $X(\cdot)x$ und wegen
$$\|X(t)x\|_2 = \|X(t)X(0)^{-1}\,(X(0)x)\,\|_2 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$
gilt $C := \sup_{t\geq 0} \|X(t)x\|_2 < \infty$. Damit erhalten wir
$$\|X(t_n)\|_{\mathrm{op}} = \|X(t_n)x_n\|_2 \leq \|X(t_n)(x_n - x)\|_2 + \|X(t_n)x\|_2 \leq \|X(t_n)\|_{\mathrm{op}}\|x_n - x\|_2 + C$$
und somit auch
$$1 \leq \|x_n - x\|_2 + \frac{C}{\|X(t_n)\|_{\mathrm{op}}},$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus sich durch Grenzübergang $n \to \infty$ der Widerspruch $1 \leq 0$ ergibt. Folglich ist 0 stabil und attraktiv, also asymptotisch stabil.

b) Die Abschätzung
$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 \leq \|X(t)\|_{\mathrm{op}}\|X(0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|x_0\|_2 \qquad (x_0 \in \mathbb{R}^d)$$
zeigt, dass für den Fall, dass 0 asymptotisch stabil ist, *jede* Lösung des Systems $x'(t) = Ax(t)$ gegen die Gleichgewichtslösung 0 konvergiert und nicht nur solche, deren Anfangswert hinreichend nahe bei 0 ist! Man spricht in einem solchen Falle von *globaler*

Attraktivität. Hieraus ergibt sich, dass A trivialen Kern haben muss, falls 0 asymptotisch stabil ist. Ist nämlich $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit $A\xi = 0$, so ist ξ selbst eine Gleichgewichtslösung und es gilt daher $X(\cdot)X(0)^{-1}\xi = \xi$, was uns zu

$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0 - \xi\|_2 = \|X(t)X(0)^{-1}(x_0 - \xi)\|_2 \qquad (x_0 \in \mathbb{R}^d)$$

und daher (wegen der globalen Attraktivität von 0) auch zu

$$\lim_{t\to\infty} X(t)X(0)^{-1}(x_0 - \xi) = 0$$

bzw. äquivalent

$$\lim_{t\to\infty} X(t)X(0)^{-1}x_0 = \xi$$

führt, woraus sich aufgrund von $\lim_{t\to\infty} X(t)X(0)^{-1}x_0 = 0$ schon $\xi = 0$ ergibt.

Ferner zeigt uns für $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit $A\xi = 0$ die Abschätzung

$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0 - \xi\|_2 = \|X(t)X(0)^{-1}(x_0 - \xi)\|_2 \leq \|X(t)\|_{\mathrm{op}}\|X(0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|x_0 - \xi\|_2$$

$(x_0 \in \mathbb{R}^d)$, dass mit 0 auch jedes weitere Equilibrium des Systems $x'(t) = Ax(t)$ stabil ist. Ist nun ξ irgendein Equilibrium des Systems $x'(t) = Ax(t)$ (oder äquivalent: es gilt $A\xi = 0$), welches außerdem stabil ist, so gilt

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x_0 \in U_\delta(\xi)\ \forall\ t \geq 0 :\ \|X(t)X(0)^{-1}x_0 - \xi\|_2 < \epsilon.$$

Ist $\epsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ wie vor, so erhalten wir für alle $x_0 \in U_\delta(0)$

$$\|X(t)X(0)^{-1}x_0\|_2 = \|X(t)X(0)^{-1}(x_0 - \xi) - \xi\|_2 < \epsilon,$$

und damit die Stabilität von 0. Insbesondere sind also entweder alle oder gar keine stationären Punkte stabil.

Analog zeigt man, dass dies ebenso auf die asymptotische Stabilität zutrifft.