Aufgabe 4. Es sei $d \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^d$ und $\|\cdot\|_M$ eine Norm auf $\mathbb{K}^{d\times d}$. Für $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ definieren wir

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup_{x\in\mathbb{K}^d\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ eine wohldefinierte, submultiplikative Norm auf $\mathbb{K}^{d\times d}$ ist mit $\|Ax\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|x\|$ für alle $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und alle $x \in \mathbb{K}^d$.
b) Zeigen Sie, dass für $\|A\|_M = \max\{|a_{ij}|;\ i,j \in \{1,\ldots,d\}\}$ ($A \in \mathbb{K}^{d\times d}$) im Falle $d \geq 2$ die Norm $\|\cdot\|_M$ nicht submultiplikativ ist.
c) Berechnen Sie $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ in den Fällen
   (a) $\|x\| = \|x\|_1 = \sum_{n=1}^d |x_n|$ für alle $x = (x_1,\ldots,x_d)^T \in \mathbb{K}^d$;
   (b) $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{n=1,\ldots,d} |x_n|$ für alle $x = (x_1,\ldots,x_d)^T \in \mathbb{K}^d$.
d) Verifizieren Sie die Formel $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und $\operatorname{tr} A$ die Spur der Matrix A bezeichne.

Lösungsvorschlag. Teil d) haben wir bereits in der übung gesehen.

zu a): Für die Wohldefiniertheit der Abbildung $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ ist zunächst nachzuweisen, dass $\|A\|_{\mathrm{op}}$ überhaupt eine reelle Zahl ist. Hierzu bemerken wir, dass wegen

$$\frac{1}{\|x\|}\|Ax\| = \left\|\frac{1}{\|x\|}Ax\right\| = \left\|A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \qquad (x \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\})$$

die Ungleichungskette

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x\in\mathbb{K}^d\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^d\\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^d\\ \|x\|=1}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}$$

gilt, d.h., wir erhalten

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^d\\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$

Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^d$ und wegen Teil b) von Aufgabe 2 ist die Menge $\{x \in \mathbb{K}^d;\ \|x\| = 1\}$ kompakt. Da außerdem die von A induzierte lineare Abbildung

$$(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2);\ x \mapsto Ax$$

und somit auch die Abbildung

$$(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|) \to (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|);\ x \mapsto Ax$$

stetig ist, ist das Supremum $\sup\{\|Ax\|;\ x \in \mathbb{K}^d \text{ mit } \|x\| = 1\}$ sogar ein Maximum und liegt in der Tat in $\mathbb{R}$.

Die Eigenschaften einer Norm prüft man nun ganz leicht nach. Ist $\|A\|_{\mathrm{op}} = 0$, so gilt $\frac{1}{\|e_j\|}Ae_j = 0$ also $Ae_j = 0$ für jeden Standardeinheitsvektor e_j ($j \in \{1,\ldots,d\}$), d.h., die Spalten von A sind Nullvektoren und A folglich die Nullmatrix. Umgekehrt gilt selbstverständlich $\|0\|_{\mathrm{op}} = 0$. Die Homogenität und die Dreiecksungleichung ergeben sich unmittelbar mit Hilfe der üblichen Rechenregeln für Suprema.

Des Weiteren gilt

$$\|Ax\| = \|x\| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|x\| \cdot \|A\|_{\mathrm{op}}$$

für alle $x \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}$ und für $x = 0$ ist die Ungleichung $\|Ax\| \leq \|x\| \cdot \|A\|_{\mathrm{op}}$ trivialerweise erfüllt.

Es bleibt somit nur die Submultiplikativität von $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ zu zeigen. Hierzu geben wir uns zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{d\times d}$ beliebig vor und zeigen die Gültigkeit der Ungleichung $\|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|B\|_{\mathrm{op}}$. Für $B = 0$ ist hierbei nichts zu zeigen. Sei darum also $B \neq 0$, dann gilt $\mathrm{N}(B) \subsetneqq \mathbb{K}^d$, wobei $\mathrm{N}(B)$ den Kern der Matrix B bezeichnet. Da $ABx = 0$ für alle $x \in \mathrm{N}(B)$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|AB\|_{\mathrm{op}} &= \sup_{x\in\mathbb{K}^d\setminus\{0\}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{K}^d\setminus \mathrm{N}(B)} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{K}^d\setminus \mathrm{N}(B)} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \cdot \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{K}^d\setminus \mathrm{N}(B)} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \|B\|_{\mathrm{op}} \leq \sup_{y\in\mathbb{K}^d\setminus\{0\}} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \|B\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|B\|_{\mathrm{op}}
\end{aligned}$$

wie behauptet.

zu b): Wir betrachten

$$A := B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\dots & 0 \\ 1 & 1 & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{d\times d}.$$

Dann gilt einerseits $\|A\|_M = \|B\|_M = 1$. Andererseits hat man

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\dots & 0 \\ 2 & 2 & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

was $\|AB\|_M = 2$ und daher $\|AB\|_M > \|A\|_M \|B\|_M$ impliziert.

zu c) (i): Es seien $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ und $x = (x_1, \dots, x_d)^T$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^d \left| \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (|a_{ij}| \cdot |x_j|) = \sum_{j=1}^d \left(|x_j| \sum_{i=1}^d |a_{ij}| \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^d \left(|x_j| \max_{k=1,\dots,d} \sum_{i=1}^d |a_{ik}| \right) = \max_{k=1,\dots,d} \sum_{i=1}^d |a_{ik}| \cdot \|x\|_1,
\end{aligned}$$

was

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \leq \max_{j=1,\dots,d} \sum_{i=1}^d |a_{ij}| =: \|A\|_S \tag{1}$$

liefert. Wir wählen nun ein $j_0 \in \{1, \ldots, d\}$ mit $\sum_{i=1}^d |a_{ij_0}| = \|A\|_S$. Für den j_0-ten Standardeinheitsvektor e_{j_0} erhalten wir sodann

$$\|Ae_{j_0}\|_1 = \sum_{i=1}^d \left| \sum_{j=1}^d a_{ij}(e_{j_0})_j \right| = \sum_{i=1}^d |a_{ij_0}| = \|A\|_S,$$

was wegen $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ die Abschätzung $\|A\|_{\mathrm{op}} \geq \|A\|_S$ liefert. Zusammen mit (1) erhalten wir damit $\|A\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_S$ (das ist die sog. *Spaltensummennorm*).

zu c) (ii): Seien wiederum $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,d}$ und $x = (x_1, \ldots, x_d)^T$. Dann folgt

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,d} \left| \sum_{j=1}^d a_{ij}x_j \right| \leq \max_{i=1,\ldots,d} \sum_{j=1}^d (|a_{ij}| \cdot |x_j|) \leq \max_{i=1,\ldots,d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty,$$

woraus sich

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \leq \max_{i=1,\ldots,d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}| =: \|A\|_Z \tag{2}$$

ergibt. Wir wählen nun ein $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$ mit $\sum_{j=1}^d |a_{i_0j}| = \|A\|_Z$ und setzen $x_j := 0$, falls $a_{i_0j} = 0$ gilt und $x_j := \frac{\overline{a_{i_0j}}}{|a_{i_0j}|}$ in allen übrigen Fällen. Wenn $a_{i_0j} = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$ gilt, so ist $\|A\|_Z = 0$ und in (2) gilt dann Gleichheit. Existiert zumindest ein $j \in \{1, \ldots, d\}$ mit $a_{i_0j} \neq 0$, so gilt $\|x\|_\infty = 1$ sowie

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,d} \left| \sum_{j=1}^d a_{ij}x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^d a_{i_0j}x_j \right| = \left| \sum_{j=1}^d |a_{i_0j}| \right| = \sum_{j=1}^d |a_{i_0j}| = \|A\|_Z = \|x\|_\infty \|A\|_Z,$$

was schließlich $\|A\|_{\mathrm{op}} \geq \|A\|_Z$ liefert. Zusammen mit (2) erhalten wir mithin $\|A\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_Z$ (das ist die sog. *Zeilensummennorm*). $\square$