A 17

zu a) Als Komposition diff'barer Fkt'n ist $V(u(\cdot;x))$ diff'bar und es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} V(u(t;x)) = ((\nabla V)(u(t;x)) \mid u'(t;x))$$
$$= ((\nabla V)(u(t;x)) \mid f(u(t;x))) \leq 0$$

für alle $t \in I(x)$. Folglich ist $V(u(\cdot;x))$ monoton fallend.

zu b): Sei $x \in N_c$. Gemäß Def. einer Lsg gilt natürlich $u(t;x) \in D$ für alle $t \in I(x) \cap [0,\infty)$. Ferner gilt nach Teil a) für alle solche t

$$V(u(t;x)) \leq V(u(0;x)) = V(x) \leq c$$

und somit insgesamt $\mathcal{O}^+(x) \subseteq N_c$.

zu c):

Wir betrachten

$$\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto V(u(t;x)).$$

Nach Teil a) ist φ monoton fallend. Daher existiert der GW $\varphi_\infty := \lim_{t\to\infty} \varphi(t)$. Wegen $\varphi(t_n) = V(\underbrace{u(t_n;x)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} u_\infty \in D}) \xrightarrow[n\to\infty]{V \text{ stetig}} V(u_\infty)$

gilt also $V(u_\infty) = \varphi_\infty$. Sei nun $t \in I(u_\infty)$ beliebig gewählt und $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $t_n + t \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt ist, d.h., es gilt $t \in [-t_n, \infty) \subseteq I(x) - t_n = I(u(t_n;x))$. A9) b) liefert daher $u(t+t_n;x) = u(t, u(t_n;x))$. Der Satz von der stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten impliziert ferner

$$\lim_{n\to\infty} u(t;u(t_n;x)) = u(t;u_\infty).$$

Damit erhalten wir insbesondere

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} V(u(t+t_n, x))}_{= \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t+t_n) \underset{s.o.}{=} V(u_\infty)} = V(u(t; u_\infty))$$

für alle $t \in I(u_\infty)$

$\underset{\substack{V \text{ ist strikte} \\ \text{Ljapunov-Fkt}}}{\Longrightarrow}$ $u(\cdot\,; u_\infty)$ ist konstant

$\underset{u(0;u_\infty)=u_\infty}{\Longrightarrow}$ $u(\cdot\,; u_\infty) = u_\infty$

$\Rightarrow$ $I(u_\infty) = \mathbb{R}$ und $f(u_\infty) = 0$

zu d):

Sei $\omega(x) := \bigcap\limits_{t \geq 0} \overline{\mathcal{O}(u(t;x))}$.

(wegen $\omega(x) \subseteq \overline{\mathcal{O}(x)} \subseteq D$)

Teil c) und A 10) b) implizieren $\omega(x) \subseteq f^{-1}(\{0\})$

A 10) c) liefert nun $\emptyset \neq \omega(x)$, also auch $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, sowie

$$0 \leq \operatorname{dist}(u(t;x), f^{-1}(\{0\})) \leq \operatorname{dist}(u(t;x), \omega(x)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Damit ist alles gezeigt.

zu e)

IA: $\sup\limits_{t\in[0,\omega_+(x))} \|u(t;x)\|_2 = \infty$

$\Rightarrow \exists (t_n)_n \in [0, \omega_+(x))^{\mathbb{N}}: t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega_+(x)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|u(t_n;x)\|_2 = \infty$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} V(u(t_n;x)) = \infty$

Allerdings gilt nach Teil a):

$\forall n \in \mathbb{N}:$ $V(u(t_n;x)) \leq V(u(0;x)) = V(x) < \infty$

Widerspruch!

Somit gilt also $\sup_{0 \le t < \omega_+(x)} \| u(t;x) \| < \infty$.

$\underline{\text{IIA}}$: $\inf_{0 \le t < \omega_+(x)} \operatorname{dist}(u(t;x), \partial D) = 0$

$\Longleftrightarrow \exists (t_n)_n \in [0, \omega_+(x))^{\mathbb{N}} : t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega_+(x)$ und

$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(u(t_n;x), \partial D) = 0$

$\left(\Longleftrightarrow \lim_{t \to \omega_+(x)} \operatorname{dist}(u(t;x), \partial D) = 0 \right)$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} V(u(t_n;x)) = \infty$

Wie eben folgt nun ein Widerspruch. Es gilt also auch

$\inf_{0 \le t < \omega_+(x)} \operatorname{dist}(u(t;x), \partial D) > 0$

A6) impliziert nun $\omega_+(x) = \infty$. Daraus folgt dann auch $\sup_{t \ge 0} \| u(t;x) \|_2 < \infty$ sowie $\inf_{t \ge 0} \operatorname{dist}(u(t;x), \partial D) > 0$.

Zur Kompaktheit der Mengen N_c:

Wäre N_c unbeschränkt, so gäbe es eine Folge $(x_n)_n$ in N_c mit $\lim_{n\to\infty} \| x_n \|_2 = \infty$, was laut (i) $\lim_{n\to\infty} V(x_n) = \infty$ nach sich zöge. Dies widerspricht jedoch der Abschätzung $V(x_n) \le c$.

Wäre N_c nicht abgeschlossen, so würde eine konvergente Folge $(y_n)_n$ in N_c existieren mit $y := \lim_{n\to\infty} y_n \notin N_c$. Es gilt dann notwendigerweise $y \notin D$; denn sonst würde aus $V(y_n) \le c$ mit Hilfe der Stetigkeit von V die Abschätzung $V(y) \le c$ folgen und wir hätten dann doch $y \in N_c$. Also $y \notin D$, aber $y \in \overline{D} = \partial D \cup D$. Somit $y \in \partial D \Rightarrow \operatorname{dist}(y_n, \partial D) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\underset{(ii)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} V(y_n) = \infty$ im Widerspruch zu $V(y_n) \le c$.

□

Bemerkung:

Es sei V eine strikte Lyapunov-Funktion, die den beiden Bedingungen (i) und (ii) genüge.

Ist dann $x \in D$ bel. und $c := V(x)$, so gilt selbstverständlich $x \in N_c$ und daher nach b) auch

$$\overline{\mathcal{O}^+(x)} \subseteq \overline{N_c} \underset{e)}{=} \underbrace{N_c}_{kp}$$

$\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ ist kp

$\underset{d),e)}{\Rightarrow}$ $\omega_+(x) = \infty$, $\sup\limits_{t \geq 0} \|u(t;x)\|_2 < \infty$, $\inf\limits_{t \geq 0} \operatorname{dist}(u(t;x), \partial D) > 0$,

$f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ und $\lim\limits_{t \to \infty} \operatorname{dist}(u(t;x), f^{-1}(\{0\})) = 0$.

Insbesondere existieren also <u>alle</u> Lösungen global nach rechts, sind auf $[0, \infty)$ beschränkt und nähern sich der Menge aller Equilibria an!

A 18 Wir setzen $y(t) := x'(t)$. Dann können wir die van-der-Pol-Gleichung äquivalent als

$$(*) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = a(1-x^2(t))y(t) - x(t) \end{cases}$$

schreiben.

Wir setzen $f(x,y) := (y,\ a(1-x^2)y - x)$.

$$f(x,y) = 0 \iff \begin{Bmatrix} y = 0 \\ a(1-x^2)y - x = 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix}.$$

Wir benutzen nun das Prinzip der linearisierten Stabilität (Satz 4.2 & 4.3), um das System $(*)$ hinsichtlich seiner Stabilitätseigenschaften zu untersuchen. Es ist

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2axy-1 & a(1-x^2) \end{pmatrix}$$

und somit

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(f'(0,0) - t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -t(a-t) + 1$$
$$= t^2 - at + 1$$
$$= \left(t - \tfrac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2-4}{4}$$

$\underline{a = 2}$

$$\mathrm{Eig}(f'(0,0)) = \{\tfrac{a}{2}\} = \{1\} \underset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow} (0,0) \text{ ist instabil}$$

$\underline{a > 2}$

$$\mathrm{Eig}(f'(0,0)) = \left\{ \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4}}{2} \right\}$$

Klar: $\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2-4}}{2} > 0 \underset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow} (0,0)$ ist instabil

$\underline{a < 2:}$

$$\mathrm{Eig}(f'(0,0)) = \left\{ \frac{a}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4-a^2}}{2} \right\} \underset{\text{Satz 4.2 \& 4.3}}{\Longrightarrow}$$ $(0,0)$ ist für $0 < a < 2$ instabil und für $a < 0$ asymp-

totisch stabil

Sei nun speziell $\underline{a=0}$. Dann nimmt (*) die Gestalt

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

an. Das ist präzise das System aus A15)a) mit dem dortigen $c = 1$. Nach der Lsg zu A15)a) ist das System somit stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

A191 Mit $y(t) := x'(t)$ erhalten wir

$$(*) \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = g(x(t)) \end{cases}$$

Setze $f(x,y) := (y, g(x))$

$f(x,y) = (0,0) \iff y = 0 \;\&\; g(x) = 0$

$x = 0 \underset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} g(x) = 0$

$x \neq 0 \underset{\text{Vorauss.}}{\Longrightarrow} x\,g(x) < 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$

Somit: $f(x,y) = (0,0) \iff x = 0 \;\&\; y = 0$

Wir zeigen nun:

$V: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (x,y) \longmapsto \frac{1}{2} y^2 - \int_0^x g(t)\,dt$

ist eine Lyapunov-Fkt für $(*)$ und $(0,0)$.

$V(0,0) = 0$ und nach HS ist V C^1-Fkt mit

$(\nabla V)(x,y) = (-g(x), y)$

Ist $x = 0$ und $y \neq 0$, so ist $V(x,y) = \frac{1}{2} y^2 > 0$

Ist $x < 0$, so gilt $g(t) > 0 \;\forall\, t \in [x, 0)$ (wegen $s g(s) < 0$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) und daher

$$V(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2} y^2}_{\geq 0} + \underbrace{\int_x^0 g(t)\,dt}_{> 0} > 0.$$

Ist $x > 0$, so gilt $g(t) < 0 \;\forall\, t \in [0, x]$ (vgl. o.) und folglich auch

$$V(x,y) = \frac{1}{2} y^2 - \underbrace{\int_0^x g(t)\,dt}_{< 0} > 0.$$

Schließlich gilt

$$((\nabla V)(x,y) \mid (y, g(x))) = -y\,g(x) + y\,g(x) = 0$$

Somit ist V als Lyapunov-Fkt für $(*)$ und $(0,0)$ erkannt.

Nach Satz 4.4 ist $(0,0)$ also eine stabile Gleichgewichtslösung.

A 20

zu a):

Wir setzen $f(x,y) := \begin{pmatrix} a - bx + x^2 y - x \\ bx - x^2 y \end{pmatrix}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

sowie $g := f|_{(0,\infty)^2}$. Wir betrachten nun das Problem

$$(AWP) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t)), \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in (0,\infty)^2. \end{cases}$$

Der Satz von Picard-Lindelöf (f ist eine C^1-Fkt) garantiert Existenz und Eindeutigkeit einer maximalen Lsg $(x(t), y(t))$ zu (AWP)

1. Beh.: $\forall t \in [0, \omega_+) : (x(t), y(t)) \in (0,\infty)^2$

Beweis: Wir setzen

$$\tau_x := \sup \{ t \in [0, \omega_+) \mid x(s) > 0 \ \forall 0 \leq s \leq t \} \in [0, \omega_+]$$

$$\tau_y := \sup \{ t \in [0, \omega_+) \mid y(s) > 0 \ \forall 0 \leq s \leq t \} \in (0, \omega_+]$$

IA: $\tau_x < \omega_+$ oder $\tau_y < \omega_+$

Die Fkt x löst das lineare, inhomogene AWP

$$\begin{cases} z'(t) = (-b-1) z(t) + a + x^2(t) y(t), & t \in (\omega_-, \omega_+) \\ z(0) = x_0 \end{cases}$$

Daher gilt

$$x(t) = e^{(-b-1)t} x_0 + e^{(-b-1)t} \int_0^t e^{(b+1)s} (a + x^2(s) y(s)) \, ds$$

für alle $t \in (\omega_-, \omega_+)$.

Ebenso löst die Fkt y das lineare, inhomogene AWP

$$\begin{cases} z'(t) = -x^2(t) z(t) + b x(t), & t \in (\omega_-, \omega_+) \\ z(0) = y_0 \end{cases}$$

und es folgt somit

$$z(t) = e^{-\int_0^t x^2(s)ds} \cdot y_0 + e^{-\int_0^t x^2(s)ds} \cdot \int_0^t e^{\int_0^s x^2(r)dr} b\, x(s)ds.$$

Wir unterscheiden nun 2 Fälle.

Fall 1: $\tau_x < \omega_+$ und $\tau_x \leq \tau_y$

Fall 2: $\tau_y < \omega_+$ und $\tau_y \leq \tau_x$

zu Fall 1:

$$x(\tau_x) = \underbrace{\underbrace{e^{(-b-1)\tau_x} \cdot x_0}_{>0} + \underbrace{e^{(-b-1)\tau_x}}_{>0} \underbrace{\int_0^{\tau_x} \underbrace{\underbrace{e^{(b+1)s}}_{>0} (\underbrace{a}_{\geq 0} + \underbrace{x^2(s)}_{\geq 0} \underbrace{y(s)}_{\geq 0,\text{ da } \tau_x \leq \tau_y}) ds}_{\geq 0}}_{\geq 0}}_{>0}$$

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0\ \forall\, t \in [\tau_x, \tau_x + \delta] \subseteq [0, \omega_+) : x(t) > 0$

x stetig

Im Widerspruch zur Wahl von τ_x!

zu Fall 2:

$$y(\tau_y) = \underbrace{\underbrace{e^{-\int_0^{\tau_y} x^2(s)ds}\, y_0}_{>0} + \underbrace{e^{-\int_0^{\tau_y} x^2(s)ds}}_{>0} \underbrace{\int_0^{\tau_y} \underbrace{e^{\int_0^s x^2(r)dr}\, b\, \underbrace{x(s)}_{\geq 0,\text{ da } \tau_y \leq \tau_x}}_{\geq 0} ds}_{\geq 0}}_{>0}$$

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0\ \forall\, t \in [\tau_y, \tau_y + \delta] \subseteq [0, \omega_+) : y(t) > 0$

y stetig

Im Widerspruch zur Wahl von τ_y!

Da beide Fälle zu einem Widerspruch geführt haben, muss
IA falsch gewesen sein. Daher ergibt sich $\tau_x = \tau_y = \omega_+$

<u>2. Beh:</u> $\omega_+ = \infty$

<u>Bew.:</u> Es gilt für alle $t \in [0, \omega_+)$

$$x'(t) + y'(t) = a - x(t)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) + y(t) - x_0 - y_0 = \int_0^t a - x(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad x(t) + y(t) = x_0 + y_0 + at - \int_0^t \underbrace{x(s)}_{\geq 0}\,ds$$

$$\leq x_0 + y_0 + at \qquad \forall t \in [0, \omega_+).$$

Wäre $\omega_+ < \infty$, so würde der Widerspruch

$$\infty = \lim_{t \to \omega_+} \|(x(t), y(t))\|_1 = \lim_{t \to \omega_+} \left(|x(t)| + |y(t)|\right)$$

$$\overset{x,y \geq 0}{=} \lim_{t \to \omega_+} \left(x(t) + y(t)\right) \leq x_0 + y_0 + a\,\omega_+ < \infty$$

folgen. Mithin gilt $\omega_+ = \infty$.

Sei nun $0 \in I \ni t \mapsto (x(t), y(t))$ die maximale Lsg von

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = g(x(t), y(t)) \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in (0, \infty)^2 \end{cases}$$

Dann ist das auch eine Lösung zu (AWP). Sei $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ die zugehörige maximale Lsg (zu (AWP)). Dann gilt $\tilde{x}(t) > 0$, $\tilde{y}(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ und daher auch

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{x}'(t) \\ \tilde{y}'(t) \end{pmatrix} = f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = g(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \quad t \geq 0, \\ (\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

Dies impliziert aber $[0, \infty) \subseteq I$. Folglich existiert die maximale Lsg $(x(t), y(t))$ global nach rechts.

zu b)

Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ die EW'e von A. Dann gilt

$$\det A = \lambda \cdot \mu$$
$$tr(A) = \lambda + \mu.$$

1. Fall: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Sei $\lambda < 0, \mu < 0 \Rightarrow \det A > 0, \ tr\, A < 0$

Sei $\det A > 0, tr\, A < 0 \Rightarrow \underbrace{(\lambda > 0, \mu > 0)}_{\Rightarrow tr\, A > 0} \vee \underbrace{(\lambda < 0, \mu < 0)}_{\Rightarrow tr\, A < 0}$

$$\underset{tr\, A < 0}{\Rightarrow} \lambda < 0, \mu < 0.$$

2. Fall: $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow \mu = \bar{\lambda}$

Sei $Re\, \lambda = Re\, \bar{\lambda} = Re\, \mu < 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

$$\Rightarrow \det A = \lambda \mu = \lambda \cdot \bar{\lambda} = |\lambda|^2 > 0$$
$$tr\, A = \lambda + \mu = \lambda + \bar{\lambda} = 2 Re\, \lambda < 0$$

Sei $\det A > 0, tr\, A < 0 \Rightarrow (\lambda \cdot \mu = \lambda \cdot \bar{\lambda} = |\lambda|^2 > 0)$

$$\lambda + \mu = \lambda + \bar{\lambda} = 2 Re\, \lambda < 0$$

$$\Rightarrow Re\, \lambda = Re\, \mu < 0$$

zu c)

Wir wollen das Prinzip der linearisierten Stabilität anwenden.

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} -b-1+2xy & x^2 \\ b-2xy & -x^2 \end{pmatrix}$$

Equilibria:

$$g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a - bx + x^2 y - x = 0 \\ bx - x^2 y = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a - x = 0 \\ x(b - xy) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = a \\ a(b - ay) = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{a>0}{\Leftrightarrow} \begin{Bmatrix} x = a \\ y = \frac{b}{a} \end{Bmatrix}$$

$$g'(a, \tfrac{b}{a}) = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}.$$

$$\det g'(a, \tfrac{b}{a}) = -a^2 b + a^2 + a^2 b = a^2 > 0$$

$$\operatorname{tr} g'(a, \tfrac{b}{a}) = b - a^2 - 1$$

$$\operatorname{tr} g'(a, \tfrac{b}{a}) < 0 \iff a^2 + 1 > b$$

Teil b) und Satz 4.2 liefern, dass $(a, \frac{b}{a})$ asymptotisch stabil ist, falls $a^2+1 > b$ erfüllt ist.

Der Beweis zu Teil b) zeigt außerdem:

„ $\det A > 0,\ \operatorname{tr} A > 0 \implies \operatorname{Re} \lambda > 0 \quad \forall \lambda \in \operatorname{Eig}(A)$ “.

Folglich gilt für $b > a^2+1$ gemäß Satz 4.3: $(a, \frac{b}{a})$ ist instabil.

Sei nun $a^2 + 1 = b$.

$$g'(a, \tfrac{b}{a}) = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ -a^2-1 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det\left(g'(a, \tfrac{b}{a}) - t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= (a^2 - t)(-a^2 - t) - a^2(-a^2 - 1) \\ &= (t - a^2)(t + a^2) + a^2(a^2+1) \\ &= t^2 - a^4 + a^4 + a^2 = t^2 + a^2 \\ &= (t - ia)(t + ia) \end{aligned}$$

Die Linearisierungsmethode liefert uns somit für $a^2+1=b$ keine Information in Bezug auf das Stabilitätsverhalten des (einzigen) Equilibriums.