Blatt 6

A 21

Wir wählen ein Fundamentalsystem $u_0, \dots, u_{n-1}$ der homogenen lin. DGl $(Su)(t) = 0$ sowie eine spezielle Lsg v des inhomogenen Problems $(Su)(t) = r(t)$. Dann sind alle Lsg'n des inhomogenen Problems $(Su)(t) = r(t)$ durch

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u_j + v \quad \text{mit} \quad \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \quad \text{gegeben.}$$

Das RWP (1) ist somit genau dann lösbar, wenn es $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \lambda_\ell R_k u_\ell + R_k v = \gamma_k$$

für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ erfüllt ist; d.h. also, wenn

$$(*) \quad \begin{pmatrix} R_0 u_0 & \cdots & R_0 u_{n-1} \\ R_1 u_0 & \cdots & R_1 u_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n-1} u_0 & \cdots & R_{n-1} u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 - R_0 v \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} - R_{n-1} v \end{pmatrix}$$

gilt.

Offenkundig gilt „b) → c)“

Es gelte nun c). Für $\gamma_0 = \dots = \gamma_{n-1} = 0$ und $r = 0$ wählen $v = 0$ und (*) schreibt sich als

$$(R_k u_\ell)_{k,\ell = 0, \dots, n-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen c) ist diese Gl. nur trivial lösbar und die quadratische Matrix $A := (R_k u_\ell)_{k,\ell=0,\dots,n-1}$ ist daher invertierbar, d.h., es gilt d).

Gilt nun d) so ist (*) für alle möglichen rechten Seiten erfüllt und es folgt a).

Es gelte nun schließlich a). Wählen wir $r = 0$ und $v = 0$, so sehen wir, dass die Gl. $A\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix}$ für alle $(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$

lösbar ist. Dann ist diese Gl. aber schon (da A quadratisch ist) eindeutig lösbar, d.h., A ist invertierbar und wir erhalten nun sofort, dass b) gilt $\square$

A 22)

Wir betrachten zunächst

$$(\ell DGl) \quad u''(t) + \omega^2 u(t) = 0.$$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + \omega^2 = (\lambda + i\omega)(\lambda - i\omega)$.

Somit ist für $\omega \neq 0$ $\{\sin(\omega t), \cos(\omega t)\}$ ein FS für (ℓDGl).

Sei nun $\omega \neq 0$ und v eine spezielle Lsg der inhomogenen Gl.
$u''(t) + \omega^2 u(t) = f(t)$ für eine stetige, T-periodische Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist das RWP (2) genau dann lösbar, wenn es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so gibt, dass

$$\begin{cases} \alpha \sin(\omega T) + \beta \cos(\omega T) + v(T) - \beta - v(0) = 0 \\ \alpha\omega \cos(\omega T) - \beta\omega \sin(\omega T) + v'(T) - \alpha\omega - v'(0) = 0 \end{cases}$$

bzw. äquivalent

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \sin(\omega T) & \cos(\omega T) - 1 \\ \omega(\cos(\omega T) - 1) & -\omega \sin(\omega T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) - v(1) \\ v'(0) - v'(1) \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

Ist also (2) für alle stetigen, T-Periodischen Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eindeutig lösbar, so hat die lin. Gl.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\omega T) & \cos(\omega T) - 1 \\ \omega(\cos(\omega T) - 1) & -\omega \sin(\omega T) \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(für $f = 0$ wählen wir $v = 0$) nur die triviale Lsg $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, d.h., A ist invertierbar. Ist umgekehrt A invertierbar, so ist $(*)$ und daher auch (2) für alle vorgenannten f eindeutig lösbar.

A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\Leftrightarrow -\omega \sin^2(\omega T) - \omega \cos^2(\omega T) - \omega + 2\omega \cos(\omega T) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\omega \cos(\omega T) \neq 2\omega$$

$$\underset{\omega \neq 0}{\Leftrightarrow} \cos(\omega T) \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega T \notin \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\underset{T>0}{\Leftrightarrow} \quad \omega \notin \left\{\frac{2\pi n}{T} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sei nun $\omega = 0$

Dann folgt aus $u''(t) = f(t)$:

$$u(t) = \int_0^t \int_0^s f(x)\,dx\,ds + at + b \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$u(0) = b, \quad u(T) = \int_0^T \int_0^s f(x)\,dx\,ds + aT + b$$

$$u'(t) = \int_0^t f(x)\,dx + a$$

$$u'(0) = a, \quad u'(T) = \int_0^T f(x)\,dx + a$$

Damit:

$$u'(0) = u'(T) \Leftrightarrow \int_0^T f(x)\,dx = 0$$

$$u(0) = u(T) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s f(x)\,dx\,ds$$

Also ist (2) in diesem Falle nicht für alle f lösbar und im Falle der Lösbarkeit ist die Lösung (b darf beliebig gewählt werden) nicht eindeutig.

A 231

zu a)

Betrachte: $u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 0 \quad (*)$

charakterist. Polynom: $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2$

$= (\lambda - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$

$= (\lambda - \frac{1}{2} - \frac{3}{2})(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{3}{2})$

$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)$

FS von $(*)$: $\{ e^{2t}, e^{-t} \}$

alle Lsg'n von $(*)$: $u(t) = a e^{2t} + b e^{-t} \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$u'(t) = 2a e^{2t} - b e^{-t}$

$u(0) + u'(0) = 1 \iff a + b + 2a - b = 1$

$\iff a = \frac{1}{3}$

$u(1) = 0 \iff a e^2 + \frac{b}{e} = 0$

$\overset{a = \frac{1}{3}}{\iff} b = -\frac{1}{3} e^3$

Lsg des RWPs: $u(t) = \frac{1}{3} e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-t+3}$

zu b)

Betrachte: $u'''(t) - u'(t) = 0 \quad (**)$

charakt. Polynom: $\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

FS von $(**)$: $\{ e^t, e^{-t}, \mathbb{1} \}$

Ermitteln einer speziellen Lsg von $u'''(t) - u'(t) = t - 1$:

Setze $v(t) := u'(t)$

$\Rightarrow v''(t) - v(t) = t - 1$

Wird durch $1 - t$ gelöst.

$u_p(t) := t - \frac{1}{2} t^2$ ist eine spezielle Lsg.

alle Lsg'en zu $u'''(t) - u'(t) = t - 1$:

$$u(t) = a e^{t} + b e^{-t} + c + t - \tfrac{1}{2} t^2 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

$$u'(t) = a e^{t} - b e^{-t} + 1 - t$$

$$u''(t) = a e^{t} + b e^{-t} - 1$$

$$u(0) + u'(0) = a + b + c + a - b + 1 = 2a + c + 1$$

$$2u''(0) + u'(1) = 2(a + b - 1) + ae - \frac{b}{e} + 1 - 1 = (2+e)a + (2 - \tfrac{1}{e})b$$

$$u(0) - u''(1) = a + b + c - (ae + be^{-1} - 1)$$

$$= (1-e)a + (1 - \tfrac{1}{e})b + c + 1$$

Zu lösen ist das lin. Gl.-system

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2+e & 2-\frac{1}{e} & 0 & 2 \\ 1-e & 1-\frac{1}{e} & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Als Lösung erhält man

$$a = \frac{2(e-1)}{3e^2 + 2e - 3}, \quad b = \frac{2e(1+e)}{3e^2 + 2e - 3}, \quad c = -\frac{3e^2 + 6e - 7}{3e^2 + 2e - 3}$$

Damit folgt:

$$u(t) = \frac{1}{3e^2 + 2e - 3}\left(2(e-1)e^{t} + 2e(1+e)e^{-t} - 3e^2 - 6e - 7\right)$$

A 24)

b) ⇒ a): Sei u eine Lsg von (3). Dann gilt

$$\int_a^b u_0(t)\, r(t)\, dt = \int_a^b u_0(t)\, ((p(t)u'(t))' + q(t)u(t))\, dt$$

$$\underset{P.I.}{=} \underbrace{[u_0(t)\cdot p(t)u'(t)]_a^b}_{=0,\text{ da } u_0(a)=u_0(b)=0} - \int_a^b u_0'(t)\, p(t) u'(t)\, dt + \int_a^b u_0(t) q(t) u(t)\, dt$$

$$= -\underbrace{[u_0'(t)p(t)u(t)]_a^b}_{=0,\text{ da } u(a)=u(b)=0} + \int_a^b (u_0'(t)p(t))' u(t)\, dt + \int_a^b u_0(t)q(t)u(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{((u_0'(t)p(t))' + q(t)u_0(t))}_{=0} u(t)\, dt = 0$$

a) ⇒ b)

Es sei $\{u_1, u_2\}$ ein FS zu homog. lin DGl

$(*)\; 0 = (pu')'(t) + q(t)u(t) = p(t)u''(t) + p'(t)u'(t) + q(t)u(t)$

Dann existieren $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $u_0(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t)$.

Sei $c \in \mathbb{R}$ bel. Dann gibt es genau ein $v_c \in C^2([a,b])$ mit

$$\begin{cases} (pv_c')'(t) + q(t)v_c(t) = r(t), & a \le t \le b,\\ v_c(a) = 0, \\ v_c'(a) = c. \end{cases}$$

Es folgt nun

$$0 = \int_a^b u_0(t)\, r(t)\, dt = \int_a^b u_0(t)\, ((pv_c')'(t) + q(t)v_c(t))\, dt$$

$$= [u_0(t)p(t)v_c'(t)]_a^b - \int_a^b u_0'(t)p(t)v_c'(t)\, dt + \int_a^b u_0(t)q(t)v_c(t)\, dt$$

$$\underset{\substack{u_0(a)=0\\=u_0(b)}}{=} -[u_0'(t)p(t)v_c(t)]_a^b + \int_a^b (u_0'p)'(t)v_c(t) + u_0(t)q(t)v_c(t)\, dt$$

$$\underset{v_c(a)=0}{=} -u_0'(b)p(b)v_c(b) + \int_a^b v_c(t)\underbrace{((u_0'p)'(t) + q(t)u_0(t))}_{=0} dt$$

$$= -u_0'(b)\, p(b)\, v_c(b)$$

$$\underset{p(b)>0}{\Longrightarrow} \quad u_0'(b) = 0 \quad \text{oder} \quad v_c(b) = 0$$

Wir zeigen, dass der Fall „$u_0'(b) = 0$" nicht eintreten kann. Wäre nämlich $u_0'(b) = 0$, so erhielten wir

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1(b) + \lambda_2 u_2(b) = u_0(b) = 0 \\ \lambda_1 u_1'(b) + \lambda_2 u_2'(b) = u_0'(b) = 0 \end{cases}$$

$$\underset{(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)}{\Longrightarrow} \quad \det\begin{pmatrix} u_1(b) & u_2(b) \\ u_1'(b) & u_2'(b) \end{pmatrix} = 0$$

Es gilt jedoch $\det\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall\, t \in [a,b]$, da ja $\{u_1, u_2\}$ FS zu $(*)$ ist!

$\Longrightarrow \quad v_c(b) = 0$

Also löst v_c das RWP (3) (und zwar für jedes $c \in \mathbb{R}$!)