Blatt 8 | A29

Wir gehen in mehreren Schritten vor

Schritt 1:

Die Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ impliziert die Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Sei also die Aussage schon für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gezeigt und sei $(X, \|\cdot\|)$ ein komplexer Raum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt. Dann ist $(X, \|\cdot\|)$ aber auch ein reeller Raum, in dem die Parallelogrammgl. gilt. Also wird durch

$$(x|y)_{\mathbb{R}} := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x,y \in X,$$

ein reelles Skalarprodukt auf X definiert und es gilt

$$(x|y) = (x|y)_{\mathbb{R}} + i\,(x|iy)_{\mathbb{R}} \text{ für alle } x,y \in X.$$

Folglich ist $(\cdot|\cdot)$ eine $\mathbb{C}$-wertige $\mathbb{R}$-Bilinearform.

Ferner gilt

$$(ix|y)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{4}(\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+(-iy)\|^2 - \|x-(-iy)\|^2)$$
$$= (x|-iy)_{\mathbb{R}}$$

Damit folgt

$$(y|x) = (y|x)_{\mathbb{R}} + i\,(y|ix)_{\mathbb{R}}$$
$$= (x|y)_{\mathbb{R}} + i\,(ix|y)_{\mathbb{R}} = (x|y)_{\mathbb{R}} + i\,(x|-iy)_{\mathbb{R}}$$
$$= \underbrace{(x|y)_{\mathbb{R}}}_{\in \mathbb{R}} - i\,\underbrace{(x|iy)_{\mathbb{R}}}_{\in \mathbb{R}} = \overline{(x|y)}$$

Desweiteren gilt

$$i(x|y) = \frac{1}{4}(i\|x+y\|^2 - i\|x-y\|^2 - \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2)$$
$$= \frac{1}{4}(\|ix+y\|^2 - \|ix-y\|^2 + i\|ix+iy\|^2 - i\|ix-iy\|^2)$$
$$= (ix|y)$$

Damit folgt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x,y \in X$:

$$\begin{aligned}((\alpha+i\beta)x\,|\,y) &= \alpha(x|y)_{\mathbb{R}} + \beta(ix|y)_{\mathbb{R}} \\ &\quad + i\alpha(x|iy)_{\mathbb{R}} + i\beta(ix|iy)_{\mathbb{R}} \\ &= \alpha(x|y) + \beta(ix|y) \\ &= \alpha(x|y) + i\beta(x|y) \\ &= (\alpha+i\beta)(x|y)\end{aligned}$$

Also ist $(\cdot|\cdot)$ eine $\mathbb{C}$-wertige Sesquilinearform und für alle $x \in X$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}(x|x) &= \frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2 + i\|x+ix\|^2 - i\|x-ix\|^2\right) \\ &= \|x\|^2 + \frac{i\|x\|^2}{4}\left(|1+i|^2 - |1-i|^2\right) \\ &\underset{|\bar z| = |z|}{=} \|x\|^2.\end{aligned}$$

Also definiert $(\cdot|\cdot)$ in der Tat ein Skalarprodukt, welches die Norm $\|\cdot\|$ induziert.

Schritt 2: Ab nun sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Es gilt $(x|y) = (y|x)$ und $(x|x) = \|x\|^2$ für alle $x, y \in X$:

Das rechnet man unmittelbar nach.

Schritt 3: $\forall x,y,z \in X: \; (x+z|y) = (x|y) + (z|y)$

$$(x+z|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+z+y\|^2 - \|x+z-y\|^2\right)$$

Die Parallelogrammgleichung liefert nun:

$$\|x+z+y\|^2 = 2(\|x+y\|^2 + \|z\|^2) - \|x+y-z\|^2$$

sowie

$$\|x+y-z\|^2 = 2(\|y-z\|^2 + \|x\|^2) - \|y-z-x\|^2$$

Damit folgt

$$(x+z|y) = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot(\|x+y\|^2 + \|z\|^2 - \|z-y\|^2 - \|x\|^2)$$

Andererseits ist

$$(x|y) + (z|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + \frac{1}{4}(\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2).$$

Es folgt somit mit Hilfe der Parallelogrammgleichung:

$$4((x+z|y) - (x|y) - (z|y))$$
$$= \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - (\|z+y\|^2 + \|z-y\|^2) + 2\|z\|^2 - 2\|x\|^2$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - (2\|z\|^2 + 2\|y\|^2) + 2\|z\|^2 - 2\|x\|^2$$
$$= 0$$

<u>Schritt 4</u>: <u>$\forall x,y \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$: $(nx|y) = n(x|y)$</u>

<u>$(\frac{1}{n}x|y) = \frac{1}{n}(x|y)$</u>

$$(nx|y) = \left(\sum_{j=1}^{n} x \,\Big|\, y\right) \underset{\substack{\text{Schritt 3} \\ +(\text{einfache}) \\ \text{Induktion}}}{=} \sum_{j=1}^{n}(x|y) = n(x|y)$$

$$n\left(\tfrac{1}{n}x|y\right) = \left(n\tfrac{1}{n}x|y\right) = (x|y)$$
$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{n}x|y\right) = \tfrac{1}{n}(x|y)$$

<u>Schritt 5</u>: <u>$\forall x,y \in X$: $(-x|y) = -(x|y)$</u>

$$(-x|y) + (x|y) \underset{\text{Schritt 3}}{=} (-x+x|y) = (0|y)$$
$$= \frac{1}{4}(\|y\|^2 - \|-y\|^2) = 0$$
$$\Rightarrow (-x|y) = -(x|y)$$

Insbesondere haben wir auch $(0|y) = 0$ gezeigt.

Wir fassen zusammen:

$\forall x,y \in X \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \forall m \in \mathbb{N}$:

$$\left(\tfrac{n}{m} x \,|\, y\right) = \tfrac{1}{m} (n x \,|\, y) = \tfrac{n}{m} (x \,|\, y) \quad \text{und}$$

$$\left(\tfrac{-n}{m} x \,|\, y\right) = -\left(\tfrac{n}{m} x \,|\, y\right) = -\tfrac{n}{m} (x \,|\, y), \quad \text{d.h. also:}$$

$\forall x,y \in X \ \forall q \in \mathbb{Q}$: $\quad (q x \,|\, y) = q (x \,|\, y)$

Schritt 6:

$\forall x,y \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda x \,|\, y) = \lambda (x \,|\, y)$

Seien $x,y \in X$ bel., $\lambda \in \mathbb{R}$ bel. und sei $(\lambda_n)_n$ Folge aus $\mathbb{Q}$ mit GW λ. Dann gilt

$$(\lambda_n x \,|\, y) = \tfrac{1}{4} \left(\|\lambda_n x + y\|^2 - \|\lambda_n x - y\|^2 \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \tfrac{1}{4} \left(\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2 \right) = (\lambda x \,|\, y)$$

und es folgt

$$\underbrace{(\lambda_n x \,|\, y)}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} (\lambda x | y)} \underset{\text{Schritt } 5 \& 4}{=} \lambda_n (x \,|\, y) \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda (x \,|\, y)$$

$\Rightarrow \ (\lambda x \,|\, y) = \lambda (x \,|\, y)$

Damit ist alles gezeigt $\square$

A30

zu a) Wir gehen in 2 Schritten vor

1. Schritt: $(B(X,E), \|.\|_\infty)$ ist ein BR (hier dürfen wir eine beliebige nicht-leere Menge X zulassen!)

Hierbei ist $B(X,E) := \{ f \in E^X \mid \|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty \}$

Man rechnet leicht nach, dass $(B(X,E), \|.\|_\infty)$ ein normierter Raum ist. Es sei nun $(f_n)_n$ eine CF in $(B(X,E), \|.\|_\infty)$.

$\Rightarrow \forall x \in X \; \forall n,m \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

$\Rightarrow \forall x \in X$: $\quad (f_n(x))_n$ ist CF in E

$\underset{E \text{ voll.}}{\Rightarrow} \forall x \in X$: $\quad f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existiert in E

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n,m \geq n_0$: $\quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/2$

Zu jedem $x \in X$ existiert ein $m_x \in \mathbb{N}$ mit $m_x \geq n_0$ und $\|f(x) - f_{m_x}(x)\| < \varepsilon/2$. Für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in X$ gilt daher

$$\begin{aligned}\|f(x) - f_n(x)\| &\leq \|f(x) - f_{m_x}(x)\| + \|f_{m_x}(x) - f_n(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|f_{m_x} - f_n\|_\infty < \varepsilon\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad f - f_{n_0} \in B(X,E) \Rightarrow f = (f - f_{n_0}) + f_{n_0} \in B(X,E)$

und es gilt $\quad \|f - f_n\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Also ist $(B(X,E), \|.\|_\infty)$ vollst.

2. Schritt: $C_b(X,E)$ ist abgeschl. UVR von $(B(X,E), \|.\|_\infty)$

Klar: $C_b(X,E)$ ist UVR.

Sei nun $(f_n)_n$ Folge aus $C_b(X,E)$ mit GW $f \in B(X,E)$

Sei $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ bel.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \|f - f_{n_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

Da f_{n_0} stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall y \in X: \quad |x-y| < \delta \Rightarrow \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Für alle $y \in X$ mit $|x-y| < \delta$ folgt sodann

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \underbrace{\|f(x) - f_{n_0}(x)\|}_{\leq \|f - f_{n_0}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_{n_0}(y) - f(y)\|}_{\leq \|f_{n_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$< \varepsilon$$

Mithin ist f in x stetig $\underset{x \in X \text{ bel.}}{\Rightarrow} f \in C_b(X, E)$.

Zu b)

Die Hinlänglichkeit von (i) und (ii) ist klar:

Ist $E = \{0\}$, so gilt $C_b(X, E) \cong \{0\}$.

Ist E ein HR und $X = \{x_0\}$, so definiert

$$C_b(X, E) \to E; \quad f \mapsto f(x_0)$$

einen isometrischen Isomorphismus. Da in E die Parallelogramm-gl. gilt, gilt sie dann auch in $C_b(X, E)$, d.h., $C_b(X, E)$ ist nach A 29) ein HR.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $(C_b(X, E), \|.\|_\infty)$ ein HR ist. Ist $E = \{0\}$, so sind wir fertig. Sei also $E \neq \{0\}$. Die Abb.

$$E \to C_b(X, E): \quad v \mapsto \mathbb{1} \otimes v,$$

wobei $\quad (f \otimes v)(x) := f(x) \cdot v \quad$ für $x \in X, v \in E, f \in C_b(X)$,

ist ein isometr. Homomorphismus. Also muss auch E ein HR sein. Da $E \neq \{0\}$, existiert ein $v_0 \in E$ mit $\|v_0\| = 1$. Dann ist die Abb

$$C_b(X) \to C_b(X, E); \quad f \mapsto f \otimes v_0$$

ein wohldefinierter, isometrischer Homomorphismus. Also ist $C_b(X)$ auch ein HR.

<u>IA</u>: X ist nicht einelementig.

Seien etwa $x_0, y_0 \in X$ mit $x_0 \neq y_0$. Dann gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{U_r(x_0)} \cap \overline{U_r(y_0)} = \emptyset$. Wir betrachten nun

$$f : X \to \mathbb{R};\quad x \mapsto \frac{\operatorname{dist}(x, X \setminus U_r(x_0))}{\operatorname{dist}(x, X \setminus U_r(x_0)) + \operatorname{dist}(x, \overline{U_{r/2}(x_0)})}$$

und

$$g : X \to \mathbb{R};\quad x \mapsto \frac{\operatorname{dist}(x, X \setminus U_r(y_0))}{\operatorname{dist}(x, X \setminus U_r(y_0)) + \operatorname{dist}(x, \overline{U_{r/2}(y_0)})}$$

Dann sind f, g wohldefinierte, stetige Fkt'n mit $f(X) \subseteq [0,1]$, $g(X) \subseteq [0,1]$, $f|_{\overline{U_{r/2}(x_0)}} \equiv 1$, $f|_{X \setminus U_r(x_0)} \equiv 0$, $g|_{\overline{U_{r/2}(y_0)}} \equiv 1$, $g|_{X \setminus U_r(y_0)} \equiv 0$

Damit folgt für alle $x \in X$

$$|f(x) \pm g(x)| \begin{cases} = 1 & , x \in \overline{U_{r/2}(x_0)} \\ \in [0,1] & , x \in U_r(x_0) \\ = 1 & , x \in \overline{U_{r/2}(y_0)} \\ \in [0,1] & , x \in U_r(y_0) \\ 0 & , x \in X \setminus (U_r(x_0) \cup U_r(y_0)) \end{cases}$$

Es folgt: $\|f\|_\infty = 1 = \|g\|_\infty$, $\|f \pm g\|_\infty = 1$

Dies liefert

$$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 1 + 1 = 2$$

$$2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) = 2 \cdot (1+1) = 4 \neq 2$$

Daher ist die Parallelogrammgleichung nicht in $C_b(X)$ erfüllt, obwohl $C_b(X)$ ein HR ist. Widerspruch!

$\Rightarrow$ <u>IA</u> falsch $\Rightarrow$ $\# X = 1$

$\square$

A3.1

zu a) Sei $(x_n)_n \in \ell^p$ bel. Dann gilt für $r \in (p, \infty)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{|x_n|}{\|(x_n)_n\|_p} \right)}_{\leq 1}^{r} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x_n|}{\|(x_n)_n\|_p} \right)^{p} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r \right)^{\frac{1}{r}}}_{= \|(x_n)_n\|_r} \leq \|(x_n)_n\|_p^{1-p/r} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{r}}}_{= \|(x_n)_n\|_p^{p/r}} = \|(x_n)_n\|_p$$

$$\Rightarrow \|(x_n)_n\|_r \leq \|(x_n)_n\|_p < \infty$$

$$\Rightarrow (x_n)_n \in \ell^r$$

Für $r = \infty$ gilt:

$\forall m \in \mathbb{N}$:

$$|x_m| = (|x_m|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = \|(x_n)_n\|_p$$

$$\Rightarrow \sup_{m \in \mathbb{N}} |x_m| \leq \|(x_n)_n\|_p < \infty.$$

Es gilt $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$, da z.B. $(1,1,1,1,\ldots) \in \ell^\infty \setminus \ell^p$.

Ferner gilt für $p < r < \infty$: $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell^r \setminus \ell^p$ für $\alpha \in (\frac{1}{r}, \frac{1}{p}]$
$\neq \emptyset$

zu b)

Die Inklusion $\bigcup_{1 \leq p < \infty} \ell^p \subseteq c_0$ ist klar. Wir betrachten nun $\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Für jedes $p \in [1, \infty)$ ist $\left(\frac{1}{(\log(n+1))^p}\right)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen. Nach dem Integralkriterium gilt daher die Äquivalenzaussage

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(n+1))^p} < \infty \iff \int_1^\infty \frac{1}{(\log(x+1))^p}\, dx < \infty$$

$$\forall \varrho > 1: \int_1^{\varrho} \frac{1}{(\log(x+1))^p}\,dx \underset{t=\log(x+1)}{=} \int_{\log(2)}^{\log(\varrho+1)} \frac{1}{t^p}\, e^t\, dt$$

Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t^p} e^t = \infty$ (und $\lim\limits_{\varrho\to\infty} \log(\varrho+1) = \infty$)

folgt $$\int_1^{\infty} \frac{1}{(\log(x+1))^p}\,dx = \int_{\log(2)}^{\infty} \frac{e^t}{t^p}\,dt = \infty$$

und somit $$\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty} \notin \bigcup_{1\le p<\infty} \ell^p \qquad (*)$$

Zu c): Beachte: nach Teil a) gilt $(x_n)_n \in \ell^p$ für alle $p \geq p_0$.

Es gelte zunächst $x_n = 0$ für alle $n > n_0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

$r < \infty$:

$$\lim_{p\to r} \|(x_n)_n\|_p = \lim_{p\to r} \|(x_n)_n\|_p = \lim_{p\to r}\Big(\sum_{n=1}^{n_0} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \Big(\sum_{n=1}^{n_0} |x_n|^r\Big)^{\frac{1}{r}} = \|(x_n)_n\|_r$$

$r = \infty$: Für alle $1 \le p < \infty$ gilt

$$\|(x_n)_n\|_\infty \underset{a)}{\le} \|(x_n)_n\|_p \le n_0^{\frac{1}{p}} \|(x_n)_n\|_\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|(x_n)_n\|_p = \|(x_n)_n\|_\infty$$

Sei nun $(x_n)_n \in \ell^{p_0}$ bel. für ein $p_0 \in [1, r)$. Wegen $\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|^{p_0} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ gilt $\|(x_n)_n - (x_n^{(m)})_n\|_{p_0} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, wobei $(x_n^{(m)})_n := (x_1, \dots, x_m, 0, 0, 0, \dots)$. Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}: \|(x_n^{(m)})_n - (x_n)_n\|_{p_0} < \varepsilon$.

Mit Teil a) folgt nun für $p \in [p_0, r)$

$$\|(x_n)_n\|_r \le \|(x_n)_n\|_p \le \|(x_n)_n - (x_n^{(m)})_n\|_p + \|(x_n^{(m)})\|_p$$
$$\le \|(x_n)_n - (x_n^{(m)})_n\|_{p_0} + \|(x_n^{(m)})\|_p$$
$$< \varepsilon + \|(x_n^{(m)})_n\|_p \xrightarrow[p\to r]{} \varepsilon + \|(x_n^{(m)})_n\|_r$$

$$\|(x_n^{(m)})_n\|_r \le \|(x_n^{(m)})_n - (x_n)_n\|_r + \|(x_n)_n\|_r$$
$$\le \|(x_n^{(m)})_n - (x_n)_n\|_{p_0} + \|(x_n)_n\|_r$$
$$< \varepsilon + \|(x_n)_n\|_r$$

Damit folgt: Für alle $p \in [p_0, r)$ hinreichend nahe bei r gilt

$$\|(x_n)_n\|_r \le \|(x_n)_n\|_p \le 3\varepsilon + \|(x_n)_n\|_r$$

$\underset{\varepsilon > 0 \text{ bel.}}{\Rightarrow}$ $\lim_{p \to r} \|(x_n)_n\|_p = \|(x_n)_n\|_r$ $\square$

(*) alternativ (studentischer Vorschlag): Sei $\infty > p \geq 1$ bel.

$$\forall \alpha > 0: \lim_{x \to \infty} \frac{\log(x+1)}{x^\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\log(n+1)^p}{n} = \Big(\underbrace{\frac{\log(n+1)}{n^{\frac{1}{p}}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big)^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: \frac{\log(n+1)^p}{n} \le 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)^p} \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

noch eine Alternative (studentischer Vorschlag):
Wende das Reihenverdichtungskriterium von Cauchy an.

A32)

zu a): Sei zunächst $w \geq 0$ und $\mathrm{int}(\{x \in K \mid w(x) = 0\}) = \emptyset$ vorausgesetzt. Dann gilt offenbar

$$(f|f)_w = \int_K |f(x)|^2 \, w(x)\, dx \geq 0$$

sowie

$$(g|f)_w = \int_K g(x)\overline{f(x)}\, w(x)\, dx \underset{\substack{w \text{ ist} \\ \mathbb{R}\text{-wertig}}}{=} \int_K \overline{f(x)\overline{g(x)}\, w(x)}\, dx$$

$$= \overline{\int_K f(x)\overline{g(x)}\, w(x)\, dx} = \overline{(f|g)_w}$$

für alle $f, g \in C(K)$.

Sei nun $f \in C(K)$ mit $(f|f)_w = 0$

$\Rightarrow \quad |f|^2 w = 0$ Lebesgue-f.ü. auf K. $(*)$

$\underline{A}$: $\exists\, y_0 \in K: \; |f(y)|^2 w(y) \neq 0$

$\underset{f, w \text{ stetig}}{\Rightarrow} \; \exists\, \varrho > 0 \; \forall x \in \mathcal{U}_\varrho(y_0) \cap K: \; |f(y)|^2 w(y) > 0$

Wegen $K = \overline{\Omega}$ enthält $\mathcal{U}_\varrho(y_0) \cap K$ auch einen Punkt $\xi \in \Omega$. Folglich existiert ein $\tilde{\varrho} > 0$ mit $\mathcal{U}_{\tilde{\varrho}}(\xi) \subseteq \mathcal{U}_\varrho(y_0) \cap K$.

Wegen $\lambda_d(\mathcal{U}_{\tilde{\varrho}}(\xi)) > 0$ (λ_d das d-dimensionale Lebesguemaß) gilt dann auch $\lambda_d(\{x \in K \mid |f(x)|^2 w(x) \neq 0\}) > 0$ im Widerspruch zu $(*)$.

Also ist $\underline{A}$ falsch und wir erhalten

$$|f|^2 w = 0 \text{ auf } K.$$

$\underline{A}$: $f \neq 0$

$\Rightarrow \; \exists\, x_0 \in K: \; f(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow \; \exists\, r > 0 \; \forall x \in \mathcal{U}_r(x_0) \cap K: \; f(x_0) \neq 0$

Wegen $K = \overline{\Omega}$ existiert ein $\xi \in \mathcal{U}_r(x_0) \cap K \cap \Omega$. Mithin gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $\mathcal{U}_\delta(\xi) \subseteq \mathcal{U}_r(x_0) \cap K \subseteq K$

$\Rightarrow \forall x \in U_\delta(\xi) : w(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{int} w^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ ↯

$\Rightarrow$ (A) falsch $\Rightarrow f = 0$ auf K

Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass $(\cdot|\cdot)_w$ ein Skalarprodukt ist. Sei nun $\emptyset \neq B \subseteq K$ eine Borel-menge.

<u>Beh:</u> $\exists$ Folge $(f_n)_n \in C(K) : 0 \leq f_n \leq 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \mathbb{1}_B \text{ pktw. Lebesgue-f.ü auf } K.$$

<u>Beweis dieser Beh:</u>

Da λ_d von innen und außen regulär ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Menge $\tilde{A}_n \subseteq B$ mit $\lambda_d(B \setminus \tilde{A}_n) < \frac{1}{n}$ sowie eine (in $\mathbb{R}^d$) offene Menge $\tilde{U}_n \supseteq B$ mit $\lambda_d(\tilde{U}_n \setminus B) < \frac{1}{n}$.

Wir setzen nun $A_n := \bigcup_{m=1}^{n} \tilde{A}_m \subseteq B$ und $U_n := \bigcap_{m=1}^{n} \tilde{U}_m \supseteq B$.

Dann ist A_n abgeschlossen mit $\lambda_d(B \setminus A_n) \leq \lambda_d(B \setminus \tilde{A}_n) < \frac{1}{n}$ und U_n ist offen mit $\lambda_d(U_n \setminus B) \leq \lambda_d(\tilde{U}_n \setminus B) < \frac{1}{n}$.

Wir definieren nun

$$g_n : \mathbb{R}^d \to [0,1] ; x \mapsto \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus U_n)}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus U_n) + \operatorname{dist}(x, A_n)}.$$

Dann gilt $g_n \in C(\mathbb{R}^d, [0,1])$. Für alle $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{n_0}$. Wegen $A_n \subseteq A_{n+1}$ folgt dann $g_n(x) = 1 \ \forall n \geq n_0$ und somit $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \mathbb{1}_B(x)$.

Für alle $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}^d \setminus U_n)$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \notin U_{n_0}$.

Aufgrund von $U_n \supseteq U_{n+1}$ ergibt sich dann $g_n(x) = 0$ für alle $n \geq n_0$ und somit $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \mathbb{1}_B(x)$.

Ferner gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$\lambda_d(B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \lambda_d(B \setminus A_m) < \frac{1}{m}$, also

$\lambda_d(B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$, sowie

$\lambda_d((\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m) \setminus B)) \leq \lambda_d(U_m \setminus B) < \frac{1}{m}$, also

$\lambda_d(\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m \setminus B) = 0$.

Wegen $\mathbb{R}^d = \underbrace{(\mathbb{R}^d \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n)}_{= \bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R}^d \setminus U_n)} \dot\cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus B) \dot\cup (B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \dot\cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

folgt $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_B$ pktw. λ_d-f.ü. auf $\mathbb{R}^d$.
Setze nun $f_n := g_n|_K$; damit ist die Zwischenbeh. gezeigt.

Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert nun

$[0,\infty) \ni (f_n \mid f_n)_w = \int_B |f_n(x)|^2 w(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_B w(x)\,dx$

Somit folgt: Für alle Borelmengen $B \subseteq K$ gilt $\int_B w(x)\,dx \geq 0$ und daher auch $\int_B \Im m\, w(x)\,dx = \Im m\left(\int_B w(x)\,dx\right) = 0$.

Dies impliziert

$\lambda_d(\underbrace{\{x \in K \mid \Im m\, w(x) < -\frac{1}{n}\}}_{=: B_n^-}) \leq \int_{B_n^-} -n\, \Im m\, w(x)\,dx = -n \int_{B_n^-} \Im m\, w(x)\,dx = 0$

sowie

$\lambda_d(\underbrace{\{x \in K \mid \Im m\, w(x) > \frac{1}{n}\}}_{=: B_n^+}) \leq \int_{B_n^+} n\, \Im m\, w(x)\,dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad \lambda_d(\{x \in K \mid \Im m\, w(x) \neq 0\}) = \lambda_d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n^- \cup B_n^+)\right) = 0$

$\Rightarrow \quad w(x) \in \mathbb{R}$ für λ_d-f.a. $x \in K$

$\underset{\substack{w \text{ stetig} \\ \overline{\Omega} = K \\ \text{vgl. O.}}}{\Longrightarrow} \quad w(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in K$

Ferner:

$$0 \leq \lambda_d(\underbrace{\{x \in K \mid w(x) < -\tfrac{1}{n}\}}_{=: E_n}) \leq -n \int\limits_{C_n} \underbrace{w(x)\,dx}_{\geq 0} \leq 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_d(C_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad w \geq 0 \quad \lambda_d$-f.ü. auf K

$\Rightarrow$ (w stetig, $\overline{\Omega} = K$ vgl. ⊙) $\quad w \geq 0$ auf K

<u>A</u>: $\mathcal{U} := \operatorname{int}(\{x \in K \mid w(x) = 0\}) \neq \emptyset$.

Wir fixieren ein $x_0 \in \mathcal{U}$ und ein $r > 0$ mit $\overline{\mathcal{U}_r(x_0)} \subseteq \mathcal{U}$ und betrachten

$$f : K \longrightarrow [0,1],\; x \longmapsto \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{U})}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{U}) + \operatorname{dist}(x, \overline{\mathcal{U}_r(x_0)})}.$$

Wegen $f \neq 0$ $(f(x_0) = 1)$ gilt nun

$$0 < (f \mid f)_w = \int\limits_K |f(x)|^2\, w(x)\,dx$$

$$= \int\limits_{K \setminus \mathcal{U}} \underbrace{|f(x)|^2}_{=0} w(x)\,dx = 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

$\Rightarrow$ <u>A</u> falsch $\Rightarrow \mathcal{U} = \emptyset$.

zu b)

Wir setzen $m := \inf_{x \in K} w(x) \underset{K \text{ kp.}}{=} \min_{x \in K} w(x)$ und

$M := \sup_{x \in K} w(x) = \max_{x \in K} w(x)$.

Gilt $w(x) > 0 \;\forall x \in K$, so folgt $m > 0$ sowie

$$m \|f\|_2^2 \leq \int_K |f(x)|^2 w(x)\, dx = \|f\|_w^2 \leq M \cdot \|f\|_2^2 .$$

Es gelte nun umgekehrt $c\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_w \leq C\|\cdot\|_2$ für gewisse Konstanten $c, C > 0$.

Sei $B \subseteq K$ eine Borelmenge und f_n wie im Beweis zu Teil a). Dann gilt

$$c^2 \int_K |f_n(x)|^2\, dx \leq \int_K |f_n(x)|^2 w(x)\, dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\underset{\substack{\text{Satz v. d.}\\ \text{maj. Konv.}}}{\Longrightarrow} \quad c^2 \lambda_d(B) = c^2 \int_K \mathbb{1}_B(x)\, dx \leq \int_K \mathbb{1}_B(x) w(x)\, dx = \int_B w(x)\, dx$$

Hieraus folgt mit $B_m := \{x \in K \mid w(x) < c^2 - \frac{1}{m}\}$ $(m \in \mathbb{N})$

$$c^2 \cdot \lambda_d(B_m) \leq (c^2 - \tfrac{1}{m})\, \lambda_d(B_m) \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_d(B_m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad w(x) \geq c \quad \text{für Lebesgue-f.a. } x \in K$$

$$\underset{\substack{w \text{ stetig}\\ K = \overline{\Omega}}}{\Longrightarrow} \quad w(x) \geq c \quad \forall x \in K$$

$$\underset{c > 0}{\Longrightarrow} \quad \forall x \in K : w(x) > 0$$

$\square$

Bemerkung:

Die Bedingung $\operatorname{int} w^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ kann nicht durch die stärkere Bedingung $\lambda_d(w^{-1}(\{0\})) = 0$ ersetzt werden. Wir geben ein Bsp an, in welchem zwar $\operatorname{int} w^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ gilt, aber $\lambda_d(w^{-1}(\{0\})) > 0$ erfüllt ist.

Sei $\Omega := (0,1) \Rightarrow K = \overline{\Omega} = [0,1]$. Wir fixieren $\varepsilon \in (0,1)$ und wählen eine Abzählung $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{Q} \cap (0,1)$. Schließlich fixieren wir ein $\delta \in (0,\frac{1}{2})$ mit $\frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$. Für $A \subseteq K$ mit $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ sei $r(A) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \operatorname{int} A\}$.

Wir konstruieren nun induktiv eine Folge $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ von abgeschl. Teilmengen von K mit den nachstehenden Eigenschaften

(1_n) I_n ist endliche Vereinigung von nichtleeren, abgeschl. Intervallen von denen wenigstens eines nicht zu einem Punkt ausgeartet ist. $(\Rightarrow \operatorname{int} I_n \neq \emptyset)$

(2_n) $$\lambda(I_n) := \lambda_1(I_n) \geq 1 - \sum_{j=1}^{n} \delta^j$$

(3_n) $\forall j \in \{0,\dots,n\}\setminus\{n\} : I_n \subseteq I_j$ und $r(I_j) < r(I_n)$

Mit $I_0 := K$ sind diese Forderungen (für $n=0$) erfüllt und es gilt $r(I_0) = 1$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ und seien die Mengen I_j mit $0 \le j \le n$ schon konstruiert. Nach Definition von $r(I_n)$ ist $x_{r(I_n)} \in \operatorname{int} I_n$ und $x_j \notin \operatorname{int} I_n$ für $1 \le j < r(I_n)$. Wir setzen nun

$$a := \inf\{\alpha \in [0,1] \mid [\alpha, x_{r(I_n)}) \subseteq I_n\} \in I_n$$

sowie

$$b := \sup\{\beta \in [0,1] \mid [x_{r(I_n)}, \beta) \subseteq I_n\} \in I_n$$

und wählen ein $\alpha \in (0, \min\{\frac{\delta^{n+1}}{2}, b - x_{r(I_n)}, x_{r(I_n)} - a\})$. Wir setzen nun $I_{n+1} := I_n \setminus U_\alpha(x_{r(I_n)})$. Dann ist $I_{n+1} \subseteq K$ abgeschlossen mit $I_{n+1} \subseteq I_n \subseteq I_j$ für alle $j \in \{0,\dots,n\}\setminus\{n\}$ und mit

$$\lambda(I_{n+1}) = \lambda(I_n \setminus U_\alpha(x_{r(I_n)})) \geq \lambda(I_n) - \lambda(U_\alpha(x_{r(I_n)}))$$

$$\geq 1 - \sum_{j=1}^{m} \delta^j - 2 \cdot \frac{\delta^{m+1}}{2} = 1 - \sum_{j=1}^{m+1} \delta^j$$

$I_{m+1} \subseteq I_m$ impliziert $r(I_m) \leq r(I_{m+1})$

$\overset{x_{r(I_m)} \notin I_{m+1}}{\Longrightarrow}$ $r(I_m) < r(I_{m+1})$

$\Rightarrow$ $r(I_j) < r(I_m) < r(I_{m+1})$ $\forall j \in \{0, \dots, m\} \setminus \{m\}$

Nach Voraussetzung gilt

$I_m = A \,\dot\cup\, [a, b]$, wobei $A = \emptyset$ oder A ist endliche Vereinigung von (möglicherweise zu einem Punkt ausgearteten) Intervallen.

$\Rightarrow I_{m+1} = A \,\dot\cup\, \overbrace{[a, x_{r(I_m)} - \alpha]}^{\neq \emptyset} \,\dot\cup\, \overbrace{[x_{r(I_m)} + \alpha, b]}^{\neq \emptyset}$

Also sind (1_{m+1}), (2_{m+1}) und (3_{m+1}) erfüllt.

Wir setzen nun $F := \bigcap_{m=0}^{\infty} I_m$. Dann ist F abgeschlossen und wegen $I_m \downarrow F \; (m \to \infty)$ $\underset{\text{und } \lambda(I_0) = 1 < \infty}{\wedge}$ liefert die Stetigkeit von λ von oben:

$$\lambda(F) = \lim_{m \to \infty} \lambda(I_m) \geq \lim_{m \to \infty} \left(1 - \sum_{j=1}^{m} \delta^j\right) = 1 - \frac{\delta}{1-\delta} > 1 - \varepsilon.$$

$\Rightarrow \lambda(F) > 0.$

Wäre nun $\operatorname{int} F \neq \emptyset$, so erhielten wir

$r(I_m) \leq r(F)$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Wegen $\mathbb{N} \ni r(I_m) < r(I_{m+1})$ —— " —— folgt dann aber der Widerspruch $\infty = \lim_{m \to \infty} r(I_m) \leq r(F) < \infty$.

Mit $w(x) := \operatorname{dist}(x, F)$ $(x \in [0,1])$ gilt $w \in C(K)$ und es ist $w^{-1}(\{0\}) = F$

$\Rightarrow$ $\operatorname{int} w^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, aber $\lambda(w^{-1}(\{0\})) > 0$.

A 32 zu a)

Differentiation unter dem Integralzeichen liefert für $t \in (0,\infty)$

$$E'(t) = \int_0^L 2 u_t(x,t)\, u_{tt}(x,t)\, dx + \int_0^L 2c^2 u_x(x,t)\, u_{tx}(x,t)\, dx$$

$$= \int_0^L 2c^2 \Big(u_t(x,t)\, u_{xx}(x,t) + u_x(x,t) \underbrace{u_{tx}(x,t)}_{= u_{xt}(x,t) \text{ (nach H.A. Schwarz)}} \Big)\, dx$$

$$= \int_0^L 2c^2 \frac{\partial}{\partial x}\big(u_t(x,t)\, u_x(x,t) \big)\, dx$$

$$= 2c^2 \Big(\underbrace{u_t(L,t)}_{= \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{u(L,s)}_{=0}\big|_{s=t}} u_x(L,t) - \underbrace{u_t(0,t)}_{= \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{u(0,s)}_{=0}\big|_{s=t}} u_x(0,t) \Big) = 0$$

$\Rightarrow$ E ist konstant auf $(0,\infty)$ $\underset{E \text{ ist stetig}}{\Longrightarrow}$ E ist konstant

zu b)

Dass (1) eine Lsg hat, wurde in der Vorlesung gezeigt.
Es seien nun u, v beides Lsg'n zu (1). Dann löst $u-v$ das Problem

$$(1)' \begin{cases} w_{tt}(x,t) = c^2 w_{xx}(x,t), & (x,t) \in \Omega \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ w(x,0) = 0, & x \in [0,L] \\ w_t(x,0) = 0, & x \in [0,L] \end{cases}$$

Dann gilt mit E wie in a), wobei u durch $w := u-v$ zu ersetzen ist:

$$\forall\, t \in [0,\infty): \quad E(t) = E(0) = \int_0^L \underbrace{w_t^2(x,0)}_{=0}\, dx + \int_0^L c^2 \underbrace{w_x^2(x,0)}_{= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{w(x,0)}_{=0})\right)^2 = 0}\, dx = 0$$

$\Rightarrow$ $\forall (x,t) \in \Omega: \quad w_t(x,t) = 0 = w_x(x,t)$

$\underset{c>0}{\Longrightarrow}$ $\forall (x,t) \in \Omega: \quad (\nabla w)(x,t) = 0$ $\Rightarrow$ w ist konstant auf $(0,L) \times (0,\infty)$

$\underset{w \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ w auf Ω konstant $\underset{w(0,t)=0}{\Longrightarrow}$ $w \equiv 0$. $\Rightarrow$ $u \equiv v$ $\square$