A331

zu a): Das zeigt man wie die entsprechende Aussage in Aufgabe 4a): Sei $T \neq 0$ (sonst ist die Aussage klar)

$$\|ST\|_{\mathcal{B}(X,Z)} = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|STx\|_Z}{\|x\|_X}$$

$$= \sup_{x \in X\setminus N(T)} \underbrace{\frac{\|STx\|_Z}{\|Tx\|_Y}}_{\leq \|S\|_{\mathcal{B}(Y,Z)}} \underbrace{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}}_{\leq \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}} \leq \|S\|_{\mathcal{B}(Y,Z)} \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$$

zu b):

Es sei $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ eine CF in $(\mathcal{B}(X,Y), \|.\|_{\mathcal{B}(X,Y)})$.
Dann ist $(T_n|_{\overline{U_1(0)}})_{n=1}^{\infty}$ eine CF im $(B(\overline{U_1(0)}, Y), \|.\|_\infty)$ (siehe Lsg zu A331a)), also nach der Lsg zu A331a) gegen ein $f \in B(\overline{U_1(0)}, Y)$ (glm) konvergent.

Ferner:

$$\forall x \in X \, \forall n,m \in \mathbb{N}: \|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y$$
$$\leq \|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \|x\|_X \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $(T_n x)_{n=1}^{\infty}$ ist CF in $(Y, \|.\|_Y)$, also gegen ein $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ konvergent. Man sieht leicht, dass T linear ist.

Für alle $x \in \overline{U_1(0)}$ gilt nun

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (T_n|_{\overline{U_1(0)}})x = \lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$$

$$\Rightarrow T|_{\overline{U_1(0)}} = f \in B(\overline{U_1(0)}, Y)$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|_Y < \infty \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X,Y)$$

Ferner: $\|T - T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \|T|_{\overline{U_1(0)}} - T_n|_{\overline{U_1(0)}}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\square$

A341

zu a)

Wir setzen

$$f_n(x) := \frac{1}{4\pi^2 n} \sin(2\pi n x)$$

für $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ glm auf $[0,1]$, $f_n(0) = f_n(1) = 0$

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi n x)$$

$$f_n''(x) = -n \sin(2\pi n x)$$

Für $p = \infty$ ergibt sich, da f_n'' stetig ist:

$$\|f_n''\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |f_n''(x)| \geq \left|f_n''\left(\frac{1}{4n}\right)\right| = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n''\|_\infty = \infty \quad \Rightarrow$ A ist nicht stetig

Sei jetzt $p < \infty$:

$$\|f_n''\|_p^p = n^p \int_0^1 |\sin(2\pi n x)|^p \, dx$$

$$= n^p \int_0^{2\pi n} |\sin(y)|^p \frac{1}{2\pi n} \, dy$$

$$= \frac{n^p}{2\pi n} 2n \underbrace{\int_0^\pi |\sin(y)|^p \, dy}_{>0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\Rightarrow$ A ist auch für $p < \infty$ nicht stetig.

zu b)

Sei $u \in \mathcal{D}(A)$. Dann gilt

$$Au = (pu')' + qu = (pu')' + M_q u ,$$

wobei

$$M_q : (C([0,1]), \|.\|_\infty) \to (C([0,1]), \|.\|_\infty)$$
$$f \mapsto q \cdot f$$

stetig ist

A ist also genau dann unstetig, wenn $A - M_q$ unstetig ist.

$$(A - M_q)u = pu'' + p'u' \underset{p>0}{=} p(u'' + \frac{p'}{p}u')$$

Also: $A - M_q$ unstetig gdw $M_{\frac{1}{p}}(A - M_q)$ unstetig ist.

Wir betrachten daher nun

$$\tilde{A}_g : (\mathcal{D}(A), \|.\|_\infty) \to (C([0,1]), \|.\|_\infty) ; \; u \mapsto u'' + g u'$$

mit einem $g \in C([0,1])$.

und zeigen, dass $\tilde{A}_g$ stets unbeschränkt ist.

Setze $f_n(x) := \frac{-1}{2\pi n^2} \cos(2\pi n x) + \frac{1}{2\pi n^2}$

$\Rightarrow f_n(1) = 0, \; f_n(0) = 0, \; f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ glm auf $[0,1]$

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \sin(2\pi n x) \Rightarrow f_n'(0) = 0 = f_n'(1)$$

Also: $f_n \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\tilde{A}_g)$

Es gilt: $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ glm auf $[0,1]$

$\Rightarrow g f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ —— " ——

$$f_n''(x) = 2\pi \cos(2\pi n x)$$

Wäre $\tilde{A}_g$ stetig, so erhielten wir

$$\tilde{A}_g f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{glm auf } [0,1]$$

$$\Vert$$

$$f_n'' + \underbrace{g f_n'}_{} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{glm auf } [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad f_n'' \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{glm auf } [0,1].$$

Es gilt jedoch

$$\| f_n'' \|_\infty \geq \left| f_n''\left(\tfrac{1}{n}\right) \right| = 2\pi \qquad \square$$

A351

zu a)

„(i) $\Rightarrow$ (ii)"

Da T_α stetig ist, existiert ein $M>0$ mit

$$\|(\alpha_n x_n)_n\|_p = \|T_\alpha (x_n)_n\|_p \leq M \cdot \|(x_n)_n\|_\alpha \quad \forall (x_n)_n \in D(T_\alpha)$$

Hieraus folgt mit $(x_n)_n = e_k = (\delta_{nk})_{n=1}^\infty$ $(k \in \mathbb{N})$

$$|\alpha_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ $(\alpha_n)_n$ ist beschr.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)"

Sei $(x_n)_n \in \ell^p$ bel. Für $p=\infty$ folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{|\alpha_n|}_{\leq \sup_{k\in\mathbb{N}}|\alpha_k| = \|\alpha\|_\infty} \cdot |x_n| \leq \|\alpha\|_\infty \cdot \|(x_n)_n\|_\infty < \infty$$

und für $p<\infty$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n x_n|^p = \sum_{n=1}^\infty \underbrace{|\alpha_n|^p}_{\leq \|\alpha\|_\infty^p} |x_n|^p \leq \|\alpha\|_\infty^p \, \|(x_n)_n\|_p^p < \infty.$$

Also: $\mathcal{D}(T_\alpha) = \ell^p$

Außerdem zeigen unsere Rechnungen, dass für beschränktes α die Ungleichung

$$\|T_\alpha (x_n)_n\|_p \leq \|\alpha\|_\infty \|(x_n)_n\|_p$$

für alle $(x_n)_n \in \ell^p$ gilt. Damit ist auch „(ii) $\Rightarrow$ (i)" gezeigt.

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)"

IA: α ist nicht beschränkt.

Für $p = \infty$ folgt dann aus

$$\mathcal{D}(T_\alpha) = \ell^\infty \ni \mathbb{1} = (1,1,1,1,\dots), \text{ dass}$$

$(\alpha_n \cdot 1)_n \in \ell^\infty$ im Widerspruch zur Annahme.

Sei nun $p < \infty$. Da α unbeschr. ist, existiert eine TF $(\alpha_{n_k})_k$ mit $0 < |\alpha_{n_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

Wir setzen nun $y_k := \dfrac{1}{\alpha_{n_k}}$ für $k \in \mathbb{N}$.

<u>Beh</u>: $\exists$ TF $(y_{k_m})_{m=1}^\infty$: $(y_{k_m})_m \in \ell^p$

<u>Bew. d. Beh</u>: Wegen A3 1) a) genügt es, den Fall $p=1$ zu behandeln.

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} |y_k| = 0$ existiert ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $|y_{k_1}| < 2^{-1}$. Aus dem gleichen Grund existiert ein $k_2 > k_1$ mit $|y_{k_2}| < 2^{-2}$. So fortfahrend erhalten wir eine streng monoton wachsende Folge $(k_m)_m$ aus $\mathbb{N}$ mit $|y_{k_m}| < 2^{-m}$. Mithin ist $(y_{k_m})_m$ eine TF von $(y_k)_k$ mit $(y_{k_m})_m \in \ell^1$.

Wir setzen nun

$$x_n := \begin{cases} 0, & n \notin \{n_{k_m} \mid m \in \mathbb{N}\}, \\ y_{k_m}, & \text{falls } n = n_{k_m} \text{ für ein (eindeutig bestimmtes) } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dann folgt aus $\mathcal{D}(T_\alpha) = \ell^p \ni (x_n)_n$:

$$\infty > \sum_{n=1}^\infty |x_n \alpha_n|^p = \sum_{m=1}^\infty |y_{k_m} \alpha_{n_{k_m}}|^p = \sum_{m=1}^\infty 1 = \infty \; ⚡$$

Also war die Annahme falsch und α muss doch beschr.

SWm

<u>zu b)</u> Sei T_α stetig bzw. α beschr.

Im Beweis von „(ii) ⇒ (iii)“ haben wir bereits

$$\| T_\alpha \| \leq \| \alpha \|_\infty$$

gezeigt. Im Beweis von „(i) ⇒ (ii)“ können wir für M speziell $\| T_\alpha \|$ wählen und erhalten

$$\| \alpha \|_\infty \leq M = \| T_\alpha \| .$$

Also: $\quad \| T_\alpha \| = \| \alpha \|_\infty$

$\square$

A 361

zu a)

Da k auf dem Kompaktum $[0,1]^2$ stetig ist, ist k glm stetig. Sei $\varepsilon > 0$ bel. und $f \in C([0,1])$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall (t,s), (\tau, \sigma) \in [0,1]^2$:

$$|t-\tau| + |s-\sigma| < \delta \Rightarrow |k(t,s) - k(\tau,\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2(\|f\|_\infty + 1)}$$

Für alle $t, \tau \in [0,1]$ mit $|t-\tau| < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2(\|f\|_\infty + \|k\|_\infty + 1)^2}\}$ folgt

$$|(Vf)(t) - (Vf)(\tau)| = \left| \int_0^{\min(t,\tau)} (k(t,s) - k(\tau,s)) f(s) ds + \right.$$

$$\left. + \int_{\min(t,\tau)}^{\max(t,\tau)} k(\max(t,\tau), s) f(s) ds \right|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{|k(t,s) - k(\tau,s)|}_{< \frac{\varepsilon}{2(\|f\|_\infty + 1)}} \cdot \underbrace{|f(s)|}_{\leq \|f\|_\infty} ds$$

$$+ \underbrace{(\max(t,\tau) - \min(t,\tau))}_{= |t-\tau| < \frac{\varepsilon}{2(\|f\|_\infty + \|k\|_\infty + 1)^2}} \cdot \|k\|_\infty \|f\|_\infty$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad Vf \in C([0,1])$.

alternative Argumentation:

Sei $t \in [0,1]$ und $(t_n)_n$ Folge aus $[0,1]$ mit GW t

$$g_n(s) := \mathbb{1}_{[0,t_n]} k(t_n, s) f(s) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{1}_{[0,t]} k(t,s) f(s) =: g(s)$$

punktweise auf $[0,1] \setminus \{t\}$

Ferner: $|g_n| \leq \|k\|_\infty \cdot |f| \in L^1([0,1])$

$$\underset{\substack{\text{Satz von}\\\text{der majorisierten}\\\text{Konvergenz}}}{\Longrightarrow} \quad (Vf)(t_n) = \int_0^1 g_n(s)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 g(s)\,ds = (Vf)(t)$$

$\Rightarrow$ Vf ist (folgen)stetig.

Offenkundig ist V linear und es gilt

$$|(Vf)(t)| \leq \int_0^t |k(t,s)| \cdot |f(s)|\,ds \leq \|f\|_\infty \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^t |k(t,s)|\,ds$$

$$\Rightarrow \quad \|Vf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^t |k(t,s)|\,ds$$

$$\Rightarrow \quad \|V\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^t |k(t,s)|\,ds \Rightarrow V \in \mathcal{B}(C([0,1]))$$

Da die Abb

$$[0,1] \to [0,\infty);\ t \mapsto \int_0^t |k(t,s)|\,ds$$

stetig ist, existiert ein $t_0 \in [0,1]$ mit

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^t |k(t,s)|\,ds = \int_0^{t_0} |k(t_0,s)|\,ds.$$

Für $s \in [0,1]$ setzen wir nun

$$f_n(s) := \frac{\overline{k(t_0,s)}}{|k(t_0,s)| + \frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad f_n \in C([0,1]) \text{ mit } \|f_n\|_\infty \leq 1$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|V\| \geq \|Vf_n\|_\infty \geq |(Vf_n)(t_0)| = \left| \int_0^{t_0} k(t_0,s) \frac{\overline{k(t_0,s)}}{|k(t_0,s)| + \frac{1}{n}}\,ds \right|$$

$$= \int_0^{t_0} \underbrace{\frac{|k(t_0,s)|^2}{|k(t_0,s)| + \frac{1}{n}}}_{\substack{\uparrow |k(t_0,s)|\ (n\to\infty)\\ \text{punktweise auf } [0,1]}}\,ds \xrightarrow[\substack{\text{Satz v. d.}\\\text{monotonen Konvergenz}}]{} \int_0^{t_0} |k(t_0,s)|\,ds$$

(alternativ kann man auch ausnutzen, dass wegen $\left| |k(t_0,s)| - \frac{|k(t_0,s)|^2}{|k(t_0,s)| + \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{1}{n}$ glm. Konv. vorliegt)

$$\underset{\substack{\text{Wahl}\\\text{von } t_0}}{\Longrightarrow} \quad \|V\| \geq \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^t |k(t,s)|\,ds.$$

zu b): Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ bel.

Für alle $t \in [0,1]$ gilt

$$|(Vf)(t)| \leq \int_0^t |k(t,s)| \cdot |f(s)| \, ds$$

$$\leq t \, \|k\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$$

$$= \frac{t^1 \|k\|_\infty^1}{1!} \|f\|_\infty$$

Sei die Abschätzung aus dem Hinweis nun schon für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$:

$$|(V^{n+1}f)(t)| = \left| \int_0^t k(t,s) \, (V^n f)(s) \, ds \right|$$

$$\leq \int_0^t |k(t,s)| \cdot \underbrace{|(V^n f)(s)|}_{\overset{\leq}{\text{I.V.}} \frac{s^n \|k\|_\infty^n}{n!} \|f\|_\infty} \, ds$$

$$\leq \frac{\|k\|_\infty^{n+1}}{n!} \|f\|_\infty \int_0^t s^n \, ds$$

$$= \frac{t^{n+1} \|k\|_\infty^{n+1}}{(n+1)!} \|f\|_\infty$$

Ist $f \in N(\lambda - V)$, so erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,1]$:

$$|f(t)| = \left| \frac{1}{\lambda^n} (V^n f)(t) \right| \leq \frac{t^n \|k\|_\infty^n}{|\lambda|^n \, n!} \|f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow f \equiv 0$

$\square$

Bonusaufgabe:

zu a)

Wir wählen eine Folge $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ aus Y mit

$$\|x-y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{dist}(x,Y) := \inf\{\|x-y\| \,;\, y\in Y\}$$

Wegen

$$\|y_n\| \le \underbrace{\|x-y_n\|}_{\text{beschr. Folge, da konvergent}} + \|x\|$$

ist die Folge $(y_n)_n$ beschränkt. Da $\dim Y < \infty$ gilt, existiert nach A 2) b) eine konvergente TF $(y_{n_k})_k$ mit GW y_0. Es folgt sodann

$$\|x-y_0\| = \lim_{k\to\infty} \|x-y_{n_k}\| = \operatorname{dist}(x,Y), \text{ also}$$

$$\|x-y_0\| = \inf\{\|x-y\| \,;\, y\in Y\}.$$

Sei nun $(X, \|.\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$,

$Y = \{(t,0) \mid t\in\mathbb{R}\}$ und $x = (0,1)$. Dann gilt für alle $t\in\mathbb{R}$:

$$\|(t,0)-(0,1)\|_\infty = \max\{|t|, 1\} \geq 1.$$

Wegen $\|(1,0)-(0,1)\|_\infty = 1$ folgt nun $\operatorname{dist}(x,Y)=1$ und wegen $\|(-1,0)-(0,1)\|_\infty = 1$ ergibt sich, dass Bestapproximationen nicht eindeutig sind.

zu b)

Für alle $f \in U$ gilt:

$$\frac{1}{4} = \left| \underbrace{\int_0^{1/2} x\,dx}_{=\frac{1}{8}} - \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx}_{\frac{3}{8}} \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx \right|$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |x - f(x)|\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x) - x|\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \|id - f\|_\infty + \frac{1}{2} \|id - f\|_\infty$$

$$= \|id - f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{dist}(id, U) \geq \frac{1}{4}$$

Wir betrachten nun die nachstehende Folge stetiger Fkt'n

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} x + \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{n}{n-4}x + \frac{1}{2} - \frac{n}{4(n-4)}, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ -\frac{n}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{n}{8}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{n-4}x + \frac{1}{2} - \frac{3n}{4(n-4)}, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq \frac{3}{4}, \\ x - \frac{1}{4}, & \frac{3}{4} < x \leq 1, \end{cases}$$

für $n \geq 5$ (beachte hier und im Folgenden die Skizze auf Seite 16)

Für $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ gilt:

$$|f_n(x) - x| = \frac{1}{4}.$$

Für $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ gilt einerseits

$$x - f_n(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{n}{n-4}\right)}_{>0} x - \frac{1}{2} + \frac{n}{4(n-4)} \geq \left(1 - \frac{n}{n-4}\right)\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{n}{4(n-4)}$$
$$= -\frac{1}{4}$$

und andererseits

$$x - f_n(x) \le \left(1 - \frac{n}{n-4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} + \frac{n}{4(n-4)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2n}{4(n-4)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-4} - \frac{1}{2} + \frac{n}{4(n-4)}$$

$$= \frac{-2n+4+n}{4(n-4)} - \frac{1}{n} = \frac{-(n-4)}{4(n-4)} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{n}$$

und daher

$$|x - f_n(x)| \le \frac{1}{4} + \frac{1}{n}.$$

Für $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ gilt

zum einen

$$x - f_n(x) = \underbrace{\left(1 + \frac{n}{4}\right)}_{>0} x - \frac{1}{2} - \frac{n}{8} \le \left(1 + \frac{n}{4}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} - \frac{n}{8}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{n}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{n}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$$

und zum anderen

$$x - f_n(x) \ge \left(1 + \frac{n}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} - \frac{n}{8}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{n}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{n}{8} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{n}$$

und daher $|x - f_n(x)| \le \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$.

Für $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \le \frac{3}{4}$ gilt

einerseits

$$x - f_n(x) = \left(1 - \frac{n}{n-4}\right)x - \frac{1}{2} + \frac{3n}{4(n-4)} \le \left(1 - \frac{n}{n-4}\right)\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3n}{4(n-4)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

und andererseits

$$x - f_n(x) \ge \left(1 - \frac{n}{n-4}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} + \frac{3n}{4(n-4)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{2n}{4(n-4)} - \frac{1}{n-4} - \frac{1}{2} + \frac{3n}{4(n-4)}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{-2n-4+3n}{4(n-4)} = \frac{1}{n} + \frac{n-4}{4(n-4)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$$

und folglich $|x - f_n(x)| \le \frac{1}{4} + \frac{1}{n}$.

Schließlich hat man $|x - f_n(x)| = \frac{1}{4}$ für $\frac{3}{4} < x \le 1$.

Insgesamt folgt damit

$$\| id - f_n \|_\infty \le \frac{1}{4} + \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 5.$$

Für alle $n \geq 5$ erhält man des Weiteren durch Betrachtung geeigneter Flächenstücke der Fläche „zwischen dem Graphen von f_n und der x-Achse“:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{4}$$
$$= \frac{7}{32} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

und

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{4}$$
$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{7}{32} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad f_n \in U \quad \forall n \geq 5$$

$$\Rightarrow \quad dist(id, U) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \| f_n - id \|_\infty \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}$$

<u>Also:</u> $\quad dist(id, U) = \frac{1}{4}$

<u>A:</u> $\exists f \in U : \| f - id \|_\infty = \frac{1}{4}$

Dann gilt für alle $x \in [0,1]$:

$$|f(x) - x| \le \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{4} \le f(x) \le x + \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}$$

und

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \geq \int_{\frac{1}{2}}^{1} x - \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{4} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$$

Damit folgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |\underbrace{x + \tfrac{1}{4} - f(x)}_{\geq 0}|\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{4}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in [0, \tfrac{1}{2}]: \; f(x) = x + \frac{1}{4}$$

sowie

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} |\underbrace{f(x) - (x - \tfrac{1}{4})}_{\geq 0}|\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x - \frac{1}{4}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in [\tfrac{1}{2}, 1]: \; f(x) = x - \frac{1}{4}$$

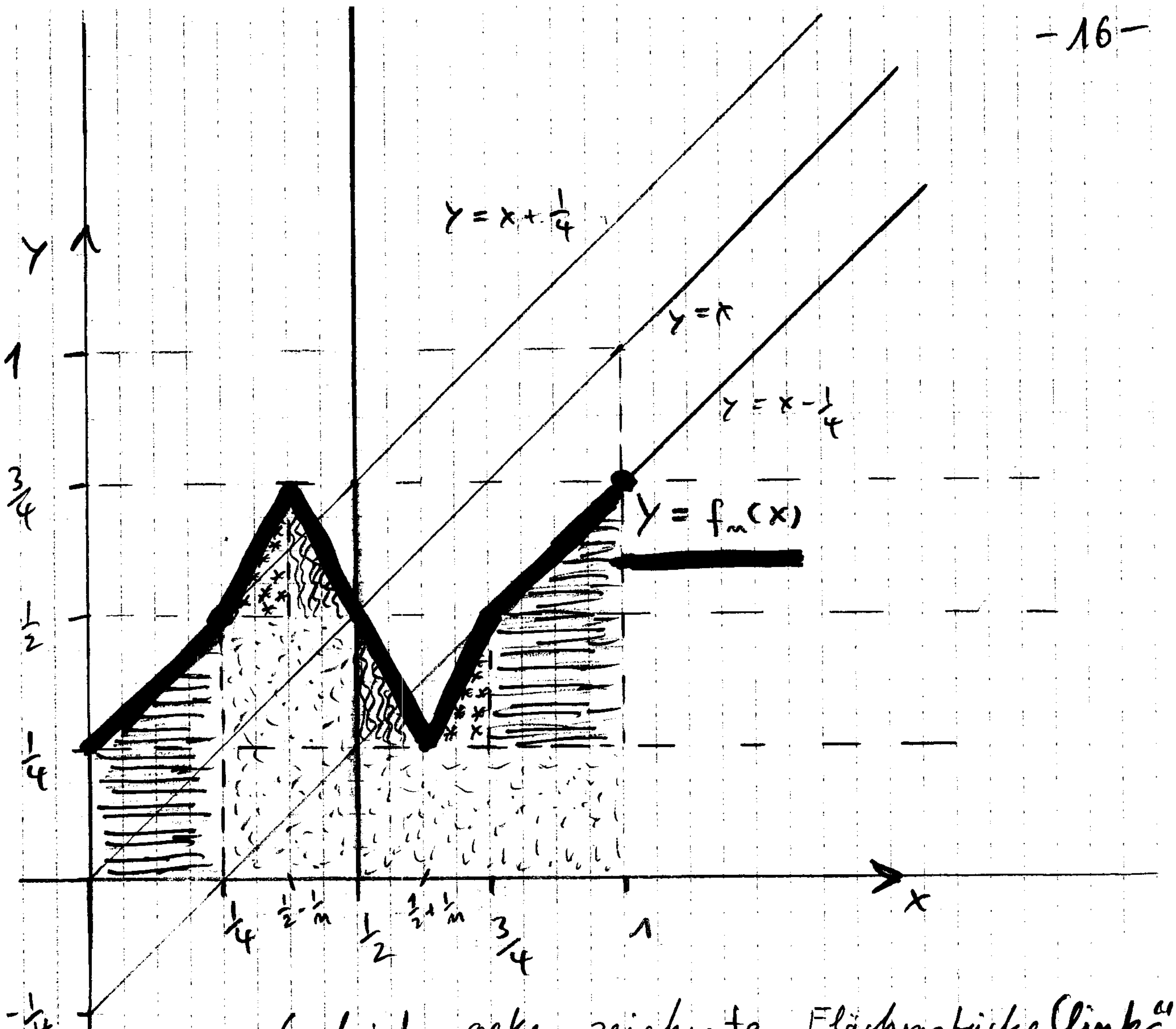
Somit folgt: $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\lightning$

und

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ IA falsch $\Rightarrow$ es gibt keine Bestapproximation aus $\mathcal{U}$ zu id

$\square$



(gleich gekennzeichnete Flächenstücke („links" und „rechts" von $\{(x,y) | x = \frac{1}{2}\}$ haben den gleichen Flächeninhalt)