KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE SS 2013
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

Differentialgleichungen und Hilberträume

Lösungsvorschlag zur Hauptklausur vom 06.08.2013

Nachfolgend finden sich Lösungsvorschläge (z.T. mit Lösungsalternativen) zu den Hauptklausuren "Differentialgleichungen" und "Differentialgleichungen und Hilberträume" vom 06.08.2013. Daneben gibt es noch einige ergänzende Bemerkungen, in denen auch auf häufige Fehler eingegangen wird.

1. Teil: Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie ein nichtkonstantes erstes Integral für das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t)y(t) + y(t), \\ y'(t) = x^2(t) - y^2(t) + 1. \end{cases}$$

***Lösungsvorschlag*:**

Da es sich hier um ein zweidimensionales System handelt, verfolgen wir den üblichen Ansatz, eine von der Nullfunktion verschiedene reellwertige C^1-Funktionen λ derart zu finden, dass die Integrabilitätsbedingung $-(\lambda h)_y = (\lambda g)_x$ mit $g(x, y) = 2xy + y$ und $h(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ erfüllt ist, um anschließend ein erstes Integral H aus der Forderung

$$H'(x, y) = \nabla H(x, y)^T = \lambda(x, y)(-h(x, y), g(x, y))$$

zu ermitteln. Für ein solches λ gilt

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\lambda h)}{\partial y}(x,y) &= -\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}(x,y)(x^2-y^2+1) - 2y\lambda(x,y)\right) \\ &= -\frac{\partial\lambda}{\partial y}(x,y)(x^2-y^2+1) + 2y\lambda(x,y) \end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial(\lambda g)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y)(2xy+y) + 2y\lambda(x,y).$$

Die Integrabilitätsbedingung ist hier also zu

$$(1) \qquad -\frac{\partial\lambda}{\partial y}(x,y)(x^2-y^2+1) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y)(2xy+y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

äquivalent. Hieraus ersehen wir, dass wir mit der Wahl $\lambda \equiv 1$ die Integrabilitätsbedingung erfüllen können. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = g(x,y) = \lambda(x,y)g(x,y)$$

machen wir nun den Ansatz

$$H(x,y) = xy^2 + \frac{1}{2}y^2 + c(x)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c. Die Forderung $\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda h = -h$ führt dann zu

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = y^2 + c'(x) = -x^2 + y^2 - 1$$

oder äquivalent

$$c'(x) = -x^2 - 1.$$

Mit der Wahl $c(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x$ erhalten wir sodann

$$H(x,y) = xy^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 - x$$

als ein nichtkonstantes erstes Integral zu dem gegebenen Differentialgleichungssystem. □

Bemerkungen:

a) Das Wort "müssen" sollte stets mit Bedacht gewählt werden, denn es beschreibt eine bestimmte Implikation bzw. Notwendigkeit. Wenn also jemand etwas in der Art schreibt wie "*Für ein nichtkonstantes erstes Integral H muss $H'(x,y) = \nabla H(x,y)^T =$*

$\lambda(x,y)(-h(x,y), g(x,y))$ *gelten.*", so wird damit ausgesagt, dass jedes erste Integral dieser Bedingung zu genügen hat. Das ist aber i. Allg. falsch! Das lässt sich an einem ganz simplen Beispiel leicht demonstrieren. Wir betrachten das System

$$\begin{cases} x'(t) = 0, \\ y'(t) = 0. \end{cases}$$

Laut Definition aus der Vorlesung ist $H \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ genau dann ein erstes Integral zu diesem System, wenn $(H'|f) = 0$ auf $\mathbb{R}^2$ gilt, wobei $f(x,y) := (g(x,y), h(x,y)) := (0,0)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d.h., jede Funktion $H \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ ist hier ein erstes Integral. Erfüllt nun H eine Bedingung der Form

$$H'(x,y) = \lambda(x,y))(-h(x,y), g(x,y)) = (0,0), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

so ist H notwendigerweise konstant.

Also muss nicht jedes erste Integral zwangsläufig einer Bedingung von der Art $H'(x,y) = \lambda(x,y)(-h(x,y), g(x,y))$ genügen. Es handelt sich hierbei lediglich um einen wohlbegründeten *Ansatz* zum Aufspüren eines nichtkonstanten Integrals,[1] aber *nicht* um eine *notwendige* Bedingung!

b) Einige sind zur Berechnung eines ersten Integrals folgendermaßen vorgegangen: Nachdem erkannt worden war, dass die Integrabilitätsbedingung mit $\lambda \equiv 1$ erfüllt werden kann, wurde hieraus alsdann

$$H(x,y) = xy^2 + \frac{1}{2}y^2 + c(x)$$

sowie

$$H(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + y^2x - x + \widetilde{c}(y)$$

gefolgert.[2] In der sich dann anschließenden Argumentation fanden sich oft zwei spezifische Fehler.

Erstens kann man hieraus nicht im Sinne der Logik *folgern*, dass $H(x,y) = xy^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 - x$ gilt. Denn sind passende Funktionen c und $\widetilde{c}$ gefunden, so sind auch $c + a$ und $\widetilde{c} + a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ geeignet und diese liefern ein anders erstes Integral!

[1] Das Beispiel zeigt außerdem, dass dieser Ansatz auch nicht unbedingt zum Ziel führt: In unserem Beispiel ist *jede* Funktion aus $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ ein erstes Integral. Doch mit dem Standardansatz lassen sich hier *ausschließlich konstante* erste Integrale finden!

[2] Achtung! In der zweiten Gleichung darf *nicht* $c(y)$ stehen!

Zweitens lässt das bloße Hinschreiben der Formel $H(x, y) = xy^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 - x$ mit der Behauptung, dass dies nun ein erstes Integral sei, formal eine Argumentationslücke, wenn nicht erläutert wird, in welcher Beziehung diese Formel zu den vorherigen Darstellungen steht, oder zumindest nachgerechnet wird, dass es sich in der Tat um ein erstes Integral handelt. Diese Lücke lässt sich aber einfach durch die explizite Angabe von stetig differenzierbaren Funktionen c und $\widetilde{c}$ derart, dass dann

$$xy^2 + \frac{1}{2}y^2 + c(x) = H(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + y^2x - x + \widetilde{c}(y)$$

erfüllt ist, schließen. Dann ist nämlich die Herkunft der obigen Formel nicht länger nebulös und nach Konstruktion von H ist dann auch klar, dass es sich um ein erstes Integral handelt.

c) Wir wollen nicht unerwähnt lassen, dass das gegebene System eine ganze Reihe weiterer erster Integrale besitzt. Denn die Bedingung (1) erweist bei einem genaueren Blick als zu

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}(x, y)(-h(x, y)) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}(x, y)g(x, y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

äquivalent, ist also insbesondere dann erfüllt, wenn $\frac{\partial\lambda}{\partial y}(x, y) = \widetilde{\lambda}(x, y)g(x, y)$ und $\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x, y) = -\widetilde{\lambda}(x, y)h(x, y)$, sagen wir etwa für ein $\widetilde{\lambda} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$, gilt. Wir können also für λ jede von der Nullfunktion verschiedene Funktion $\widetilde{H} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ wählen, die $\widetilde{H}'(x, y) = \nabla H(x, y)^T = \widetilde{\lambda}(x, y)(-h(x, y), g(x, y))$ erfüllt, insbesondere auch das im Lösungsvorschlag ermittelte H selbst! Ein weiteres nichtkonstantes erstes Integral $\widehat{H}$ kann daher aus der Bedingung

$$\widehat{H}'(x, y) = H(x, y)(-h(x, y), g(x, y)) = H(x, y)\left(\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)\right)$$

gewonnen werden. Beispielsweise könnten wir $\widehat{H}(x, y) := \frac{1}{2}H(x, y)^2$ wählen. An diese Beobachtung knüpft sich schließlich die folgende Erkenntnis:

Ist H wie im Lösungsvorschlag und $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, so gilt

$$H_\varphi'(x, y) = \nabla H_\varphi(x, y)^T = \lambda_\varphi(x, y)(-h(x, y), g(x, y))$$

wobei $H_\varphi(x, y) := \varphi(H(x, y))$ und $\lambda_\varphi(x, y) := \varphi'(H(x, y))$. Jede der Funktionen H_φ ist also ein nichtkonstantes erstes Integral zu dem gegebenen Differentialgleichungssystem.[3]

[3] Insbesondere zeigt dies, dass es die *spezielle* Wahl einer geeigneten Funktion λ im Standardansatz i. Allg. nicht erlaubt, sämtliche nichtkonstanten ersten Integrale zu ermitteln.

Aufgabe 2

Wir betrachten

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ s \mapsto \begin{cases} -s^2; & \text{falls } s \geq 0, \\ s^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Equilibria des folgenden Differentialgleichungssystems und untersuchen Sie diese auf Stabilität und asymptotische Stabilität:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - y(t), \\ y'(t) = g(x(t)) + y(t). \end{cases}$$

***Lösungsvorschlag*:**

Wir setzen zunächst

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 - y \\ g(x) + y \end{pmatrix}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und erhalten (mit Hilfe der Definition von g)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} y = x^2 \\ g(x) + x^2 = 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} y = x^2 \\ g(x) = -x^2 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{Bmatrix}.$$

Folglich ist $\{(s,s^2);\ s \geq 0\}$ präzise die Menge aller stationären Punkte.

Um die Gleichgewichtslösungen im Hinblick auf ihr Stabilitätsverhalten zu untersuchen, benutzen wir die Linearisierungsmethode. Wegen $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ und wegen $g|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ mit $\lim_{s\to 0^+}(g|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})'(s) = \lim_{s\to 0^+}(-2s) = 0 = \lim_{s\to 0^-} 2s = \lim_{s\to 0^-}(g|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})'(s)$ ist g eine stetig differenzierbare Funktion mit $g'(s) = -2|s|$ für $s \in \mathbb{R}$. Daher ist f eine $\mathcal{C}^1$-Funktion mit

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -2|x| & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für $s \geq 0$ lautet somit das charakteristische Polynom χ_s der Matrix $f'(s,s^2)$:

$$\chi_s(t) = (2s-t)(1-t) - 2|s| = 2s - t - 2st + t^2 - 2s = t(t-(2s+1)).$$

Daher besitzt die Matrix den reellen, (wegen $s \geq 0$) strikt positiven Eigenwert $2s+1$. Folglich sind alle Equilibria instabil (und somit erst recht nicht asymptotisch stabil). $\square$

Bemerkungen:

a) Ein außerordentlich häufig beganger Fehler besteht darin, dass f lediglich auf $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ betrachtet und dort differenziert wurde. Abgesehen davon, dass in der Differentialrechnung mehrerer Veränderlichen Differenzierbarkeit üblicherweise nur auf offenen Mengen definiert wird, setzen die Theoreme zur linearisierten Stabilität (Satz 4.2 und 4.3) explizit einen offenen Definitionsbereich voraus. Will man also diese Sätze zitieren, so kommt man nicht umhin, f auf einer offenen Menge zu betrachten.

b) Es ist doch mehr als bedenklich, wie häufig ganz fundamentale Fehler beim Lösen des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dem Aufschreiben der Lösung aufgetreten sind. Wer z.B. in der obigen Rechnung auch nur an einer einzigen Stelle "$\Longrightarrow$" anstelle von "$\Longleftrightarrow$" verwendet, berechnet lediglich eine Obermenge der Lösungsmenge! Wer etwas von der Art "*Also sind alle Punkte* (x, x^2) *mit* $x \geq 0$ *Equilibria.*" schreibt und sonst nichts weiter, der gibt bloß eine Teilmenge der Lösungsmenge an![4]

[4] Diese Bemerkung trifft ebenso auf Aufgabe 3 zu.

Aufgabe 3

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x'(t) = -x^3(t) - y(t), \\ y'(t) = x(t) - y^3(t). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Equilibria und weisen Sie nach, dass diese allesamt asymptotisch stabil sind.

(*Hinweis: Betrachten Sie* $V(x, y) = ax^2 + by^2$ *für geeignete* $a, b \in \mathbb{R}$.)

***Lösungsvorschlag*:**

Wir setzen

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} -x^3 - y \\ x - y^3 \end{pmatrix}$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und erhalten

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} y = -x^3 \\ x + x^9 = 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} y = -x^3 \\ x(x^8 + 1) = 0 \end{Bmatrix} \iff x = 0 = y.$$

Somit ist $(0, 0)$ die einzige stationäre Stelle. Um nachzuweisen, dass $(0, 0)$ asymptotisch stabil ist, wollen wir den Stabilitätssatz von Lyapunov zur Anwendung bringen und machen dem Hinweis folgend einen Ansatz der Form $V(x, y) = ax^2 + by^2$ für eine Lyapunov-Funktion. Dann ist V natürlich stetig differenzierbar mit

$$V'(x, y) = \nabla V(x, y)^T = (2ax, 2by)$$

und es gilt

$$V'(x, y) \cdot f(x, y) = (\nabla V(x, y) | f(x, y)) = -2ax^4 - 2axy + 2bxy - 2by^4,$$

wobei $(\cdot | \cdot)$ das übliche Innenprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Mit der Wahl $a = b = 1$ liefert dies

$$V'(x, y) \cdot f(x, y) = (\nabla V(x, y) | f(x, y)) = -2x^4 - 2y^4 \leq 0,$$

wobei die Ungleichung strikt ist, falls $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt. Ferner haben wir dann $V(0, 0) = 0$ und $V(x, y) = x^2 + y^2 > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Also ist $V(x, y) = x^2 + y^2$ eine Lyapunov-Funktion für f und $(0, 0)$ mit $V'(x, y) \cdot f(x, y) = (\nabla V(x, y) | f(x, y)) < 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Folglich ist $(0, 0)$ nach dem Stabilitätssatz von Lyapunov asymptotisch stabil. □

Aufgabe 4

Untersuchen Sie das folgende (nichtlineare) Dirichlet-Randwertproblem hinsichtlich seiner Lösbarkeit:

$$\begin{cases} u''(t) = \int_{-\infty}^{\sin(t)u(t)} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s, \quad 0 \le t \le 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

***Lösungsvorschlag*:**

Wir zeigen, dass das gegebene Dirichlet-Randwertproblem eindeutig lösbar ist, indem wir die Voraussetzungen aus dem Satz von Lettenmeyer verifizieren. Hierzu setzen wir

$$f(t,x) := \int_{-\infty}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$

für $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$;[5] hiermit nimmt dann das gegebene Dirichlet-Randwertproblem die Form

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t)), \quad 0 \le t \le 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

an. Wir erhalten nun mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel, dass f (bezüglich x und t) stetig partiell differenzierbar und daher auch (als Funktion in (t,x)) stetig ist mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s + \int_{0}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right) = \mathrm{e}^{-(\sin(t)x)^2} \cdot \sin(t)$$

und mit

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s + \int_{0}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right) = \mathrm{e}^{-(\sin(t)x)^2} \cdot x\cos(t)$$

[5] Die Existenz dieses Integrals sollte aus der Analysis III bekannt sein, kann aber auch leicht wie folgt gezeigt werden: Es gilt $\mathrm{e}^{-s^2} \le \mathrm{e}^{-|s|}$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Wir erhalten somit (wegen $\mathrm{e}^{-s^2} \ge 0$)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s &\le \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{-1} \mathrm{e}^{-|s|}\,\mathrm{d}s + \int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-|s|}\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s + 2\int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s + 2\left[-\mathrm{e}^{-s}\right]_1^{\infty} = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s + \frac{2}{\mathrm{e}} < \infty \end{aligned}$$

für jedes $\alpha \in (-\infty, \sin(t)x]$. Folglich ist die Funktion

$$(-\infty, \sin(t)x] \to \mathbb{R};\ \alpha \mapsto \int_{\alpha}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$$

(wegen $\mathrm{e}^{-s^2} \ge 0$) monoton fallend und beschränkt, so dass der Grenzwert $\lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$ existiert.

für alle $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, woraus unmittelbar $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq 1$ für alle $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ folgt. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung impliziert nun für alle $t \in [0,1]$ und $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}$ (mit $x \neq \widetilde{x}$) die Existenz einer reellen Zahl $\xi = \xi(t,x,x_0)$ zwischen x und $\widetilde{x}$ mit $f(t,x) - f(t,\widetilde{x}) = (x-\widetilde{x})\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)$, was

$$|f(t,x) - f(t,\widetilde{x})| = |x - \widetilde{x}| \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)\right| \leq |x - \widetilde{x}|$$

nach sich zieht. Die Funktion f ist also bzgl. der zweiten Variablen Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 1. Wegen $\pi^2 > 1$ können wir daher in der Tat den Satz von Lettenmeyer anwenden.

Man kann die Lipschitz-Stetigkeit von f bzgl. der zweiten Variablen auch direkt mit Hilfe der Standardabschätzung für Integrale einsehen. Wir erhalten dann nämlich

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,\widetilde{x})| &= \left|\int_{-\infty}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{\sin(t)\widetilde{x}} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_{\sin(t)\widetilde{x}}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \int_{\min\{\sin(t)\widetilde{x},\sin(t)x\}}^{\max\{\sin(t)x,\sin(t)\widetilde{x}\}} \underbrace{|\mathrm{e}^{-s^2}|}_{\leq 1}\,\mathrm{d}s \\ &\leq 1 \cdot (\max\{\sin(t)x, \sin(t)\widetilde{x}\} - \min\{\sin(t)x, \sin(t)\widetilde{x}\}) \\ &= |\sin(t)x - \sin(t)\widetilde{x})| = |\sin(t)| \cdot |x - \widetilde{x}| \leq |x - \widetilde{x}| \end{aligned}$$

für alle $t \in [0,1]$ und $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}$.[6]

Alternativ kann man auch den Mittelwertsatz der Integralrechnung heranziehen. Für alle $t \in [0,1]$ und $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}$ gibt es nämlich nach dem Mittelwertsatzes der Integralrechnung eine reelle Zahl ζ zwischen $\sin(t)x$ und $\sin(t)\widetilde{x}$ derart, dass

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,\widetilde{x})| &= \left|\int_{-\infty}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{\sin(t)\widetilde{x}} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_{\sin(t)\widetilde{x}}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\mathrm{e}^{-\zeta^2}(\sin(t)x - \sin(t)\widetilde{x})\right| = \mathrm{e}^{-\zeta^2}|\sin(t)| \cdot |x - \widetilde{x}| \leq |x - \widetilde{x}| \end{aligned}$$

erfüllt ist. □

[6] Mit einem ähnlichen Argument kann man auch die Stetigkeit von f direkt einsehen, denn es gilt

$$|f(t,x) - f(\tau,y)| = \left|\int_{-\infty}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{\sin(\tau)y} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_{\sin(\tau)y}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right| \leq |\sin(t)x - \sin(\tau)y|$$

für alle $t, \tau \in [0,1]$ und $x, y \in \mathbb{R}$, woraus $\lim_{(\tau,y)\to(t,x)} f(\tau,y) = f(t,x)$ folgt.

Bemerkungen:

a) Zur Untersuchung der Lösbarkeitseigenschaften einer Differentialgleichung gehören stets zwei Aspekte, nämlich die Frage der Existenz *und* der Eindeutigkeit von Lösungen. Eine korrekte Bearbeitung dieser Aufgabe muss sich also beider Fragen annehmen.

Demgegenüber ist die Frage nach der Maximalität einer Lösung einer Randwertaufgabe i. Allg. wenig sinnvoll.[7] Betrachten wir etwa das folgende allgemeine Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \quad 0 \le t \le 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

mit einer stetigen Funktion $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei wir wie üblich unter einer Lösung dieses Problems eine Funktion $u \in \mathrm{C}^2([0, 1])$ verstehen, welche den obigen Gleichungen genügt.

Wie sollte nun der Begriff der Maximalität einer Lösung vernünftigerweise gefasst werden? Etwa wie bei Anfangswertproblemen als eine Lösung zu (2), die sich nicht echt nach links oder rechts fortsetzen lässt? Aber *jede* Lösung zu (2) ist *per definitionem* auf ganz $[0, 1]$ erklärt und kann daher nicht fortgesetzt werden, ohne dass $(t, u(t))$ den Definitionsbereich von f verlässt, d.h., jede Lösung wäre in diesem Sinne maximal. Diese Beobachtung allein lässt die Frage nach der Maximalität bereits als wenig fruchtbar erscheinen.

Man könnte nun versuchen hier die Definition der Maximalität dahingehend zu modifizieren, dass man auf irgendeine geeignete Weise auch Fortsetzungen von Lösungen zu (2) zulässt, die auf einem größeren Intervall als $[0, 1]$ definiert sind und dass man dann solche Lösungen als maximal ansieht, welche keine derartige Fortsetzung gestatten.[8] Doch die nachfolgenden Überlegungen zeigen, dass eine solche Begriffs-

[7] Abgesehen davon wurde dieser Begriff in der Vorlesung – aus guten Gründen, wie die nachfolgenden Ausführungen zeigen – nicht für Lösungen von Randwertaufgaben eingeführt.

[8] Bereits an dieser Stelle stellt sich die Frage nach dem Nutzen einer solchen Definition, da man doch bei Randwertaufgaben expressis verbis an durch eine Differentialgleichung gegebenen Funktionen interessiert ist, die zusätzlichen Randbedingungen unterworfen sind und deren Erfüllbarkeit im Zentrum der Theorie steht. Warum sollte man sich dann plötzlich damit beschäftigen wollen, was etwa wie in dieser Aufgabe jenseits von $[0, 1]$ geschieht? Es besteht also anders als bei Anfangswertproblemen keine inhärente Notwendigkeit für eine

bildung wenig nützlich und gänzlich uninteressant wäre, da es dann in diesem Sinne *niemals* maximale Lösungen der gegebenen Randwertaufgabe gäbe. Sei nämlich $u \in \mathrm{C}^2([0,1])$ irgendeine Lösung von (2). Dann kann man u etwa durch die Definition $u(t) := \frac{u''(1)}{2}t^2 + (u'(1) - u''(1))t + \frac{u''(1)}{2} - u'(1)$ $(t > 1)$ zu einer auf $[0, \infty)$ zweimal stetig differenzierbaren Funktion fortsetzen. Das kann man allerdings ebenso durch die Festsetzung $u_p(t) := \frac{u''(1)}{2}t^2 + (u'(1) - u''(1))t + \frac{u''(1)}{2} - u'(1) + (t-1)^p$ $(t > 1)$ mit irgendeinem $p \in (2, \infty)$ erreichen. Mithin ist u nicht nur nicht maximal, sondern hinzukommt noch, dass u, selbst wenn wir f einer Lipschitzbedingung wie im Satz von Lettenmeyer unterwerfen, unendlich viele, nicht miteinander vergleichbare Fortsetzungen besitzt (anders als bei Anfangswertproblemen mit (lokal) Lipschitz-stetiger rechter Seite).

Gewiss kann man gegen diesen naiven Maximalitätsbegriff ins Feld führen, dass die eben angegebenen Fortsetzungen nicht die Struktur der Differentialgleichung $u''(t) = f(t, u(t))$ berücksichtigen. Vielmehr würden wir naiverweise fordern, dass eine Fortsetzung von u gleichfalls einer entsprechenden Differentialgleichung zu genügen hat, falls sich f geeignet fortsetzen lässt; so kann man z.B. die Funktion f aus dem Lösungsvorschlag auch auf ganz $\mathbb{R}^2$ betrachten und dann nach nichtfortsetzbaren Lösungen der Differentialgleichung $v''(t) = f(t, v(t))$ suchen, die u fortsetzen. Aber auch dieser Ansatz weist zwei wesentliche Schwächen auf.

Zunächst stellt sich die Frage, was es bedeutet, f "geeignet" fortzusetzen. Der sog. Fortsetzungssatz von Tietze etwa impliziert, dass jede stetige Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt. Ist nun U irgendeine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit $A := [0,1] \times \mathbb{R} \subseteq U$, so definiert auch $F_U(t,x) := F(t,x)\frac{\operatorname{dist}((t,x),\mathbb{R}^2 \setminus U)}{\operatorname{dist}((t,x),\mathbb{R}^2 \setminus U) + \operatorname{dist}((t,x),A)}$ $((t,x) \in \mathbb{R}^2)$ eine stetige Fortsetzung von f. Welche ist nun die "richtige" Fortsetzung?

Und selbst wenn sich dieses Problem adäquat lösen ließe, so fänden wir uns womöglich in der folgenden Situation wieder: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(3) \qquad \begin{cases} (x'(t), y'(t)) = (y(t), F(t, x(t)), & t \geq 1, \\ (x(1), y(1)) = (0, u'(1)), \end{cases}$$

mit einer wie auch immer geeigneten stetigen Fortsetzung $F : G \to \mathbb{R}$ der Funktion f, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Menge der Form $[1, a] \times U_r(0)$ mit einem $a > 1$ und $r > 0$ umfasse.

derartige Begriffsbildung. Auch die Anwendung der Theorie beispielsweise bei der Beschreibung physikalischer Phänomene (z.B. schwingende Saite) liefert keine Motivation für eine solche Untersuchung.

Nach dem Satz von Peano besitzt dieses Anfangswertproblem wenigstens eine Lösung $(x, y) : [1, b) \to \mathbb{R}$ (für ein $b \in (1, a]$). Wegen $x' = y \in \mathrm{C}^1([1, b))$ gilt dann $x \in \mathrm{C}^2([1, b))$ mit $x(1) = 0 = u(1)$, $x'(1) = y(1) = u'(1)$ und mit $x''(1) = y'(1) = F(1, x(1)) = F(1, 0) = f(1, 0) = f(1, u(1)) = u''(1)$. Daher ist die durch

$$v : [0, b) \to \mathbb{R};\ t \mapsto \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(t), & t \in (1, b) \end{cases}$$

gegebene Funktion eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche u echt fortsetzt und außerdem der Differentialgleichung $v''(t) = v'(t) = F(t, v(t))$ $(t \in [0, b))$ genügt. Auch dann gäbe es also niemals maximale Lösungen $u \in \mathrm{C}^2[0, 1]$ des Randwertproblems (2).

Kurzum: Die Frage nach der Maximalität (im oben genannten Sinne) der Lösung einer Randwertaufgabe ist, wenn auch vielleicht nicht sinnlos, so doch nach Lage der Dinge jedenfalls nutzlos.

b) Allzu häufig wurde in den Lösungen versäumt, darauf hinzuweisen (geschweige denn zu begründen), dass obiges f stetig ist. Das ist jedoch eine wesentliche Voraussetzung im Satz von Lettenmeyer, auch wenn sie etwas unscheinbar wirkt. Betrachten wir etwa $f(t, x) := \mathbb{1}_{(\frac{1}{2}, 1]}(t)$ für $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$. Es ist klar, dass das Randwertproblem

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

keine C^2-Lösung besitzen kann. Man kann sich aber zudem sehr leicht überlegen, dass auch keine zweimal differenzierbare Funktion $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ existiert, welche dieses Randwertproblem löst, obwohl trivialerweise $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ für alle $t \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $L > 0$ gilt.

c) Manche haben wie folgt (oder ähnlich) argumentiert:

"*Es gilt* $f(t, x) \leq \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-s^2}\, \mathrm{d}s$ *und daher auch* $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \leq \mathrm{e}^{-x^2}$*.*"

Zwar ist die Prämisse dieser Implikation noch richtig, doch ist die Konklusion nicht nur falsch,[9] sondern scheint schlimmer noch auf dem Trugschluss zu fußen, wonach sich Un-

[9] Es gilt nämlich

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)}{\mathrm{e}^{-x^2}} = \frac{\mathrm{e}^{-(\sin(t)x)^2} \cdot \sin(t)}{\mathrm{e}^{-x^2}} = \mathrm{e}^{(1-\sin^2(t))x^2} \cdot \sin(t)$$

gleichungen zwischen Funktionen auf deren Ableitungen (sofern vorhanden) übertragen. Das ist keine korrekte Schlussfolgerung (wie man schon in unserem Fall sieht)!

d) Angesichts einiger Versuche, das Integral $\int_{-\infty}^{\sin(t)x} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s$ explizit auszurechnen, betonen wir an dieser Stelle ausdrücklich, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ s \mapsto \mathrm{e}^{-s^2}$ nach einem weithin bekannten Resultat von Liouville keine Stammfunktion besitzt, die sich auf "elementare"[10] Weise darstellen lässt.

für alle $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$. Für fixiertes $t \in (0, 1]$ gilt dann $\sin(t) \in (0, \sin(1)] \subseteq (0, 1)$ und es folgt

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)}{\mathrm{e}^{-x^2}} = \infty,$$

weshalb die Ungleichung $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \leq \mathrm{e}^{-x^2}$ nicht für alle $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ bestehen kann.

[10] Wir verzichten an dieser Stelle darauf, diesen Begriff zu präzisieren.

2. Teil: Hilberträume

Aufgabe 5

Wir betrachten die Abbildung

$$R : \ell^2 \to \ell^2;\ (x_n)_n \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

a) Zeigen Sie, dass R ein isometrischer linearer Operator ist.

b) Zeigen Sie, dass das Bild $R(\ell^2)$ von R abgeschlossen ist, und bestimmen Sie $R(\ell^2)^\perp$.

c) Bestimmen Sie alle $(x_n)_n, (y_n)_n \in \ell^2$, für die der Grenzwert $\lim_{m\to\infty}(R^m(x_n)_n|(y_n)_n)$ ($m \in \mathbb{N}$) existiert, wobei $(\cdot|\cdot)$ das übliche Innenprodukt auf ℓ^2 bezeichnet.

***Lösungsvorschlag*:**

zu a): Die Linearität rechnet man leicht nach: Für alle $(x_n)_n, (y_n)_n \in \ell^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gilt

$$\begin{aligned} R(\lambda(x_n)_n + (y_n)_n) &= R((\lambda x_n + y_n)_n) = (0, \lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3, \ldots) \\ &= \lambda(0, x_1, x_2, x_3, \ldots) + (0, y_1, y_2, y_3, \ldots) = \lambda R((x_n)_n) + R((y_n)_n). \end{aligned}$$

Wegen

$$\|R(x_n)_n\|_2 = \left(0 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^3 + \ldots\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(x_n)_n\|_2^2$$

($(x_n)_n \in \ell^2$ beliebig) ist R auch isometrisch (insbesondere ist R auch wohldefiniert).

zu b): Zunächst einmal gilt $R(\ell^2) = \{(y_n)_n \in \ell^2;\ y_1 = 0\}$; dabei ist die Inklusion “$\subseteq$” klar. Ist umgekehrt $(y_n)_n \in \ell^2$ mit $y_1 = 0$, so gilt auch $(x_n)_n := (y_{n+1})_n \in \ell^2$ und wir haben $(y_n)_n = R(x_n)_n \in R(\ell^2)$. Also gilt in der Tat $R(\ell^2) = \{(y_n)_n \in \ell^2;\ y_1 = 0\}$.
Die lineare Abbildung

$$p_1 : \ell^2 \to \mathbb{K};\ (y_n)_n \mapsto y_1$$

ist wegen $|y_1| \leq \|(y_n)_n\|_2$ stetig und ihr Kern $\mathrm{N}(p_1) = (p_1)^{-1}(\{0\})$ daher in ℓ^2 abgeschlossen.
Wegen

$$\mathrm{N}(p_1) = \{(y_n)_n \in \ell^2;\ y_1 = 0\} = R(\ell^2)$$

ist daher auch $R(\ell^2)$ abgeschlossen.

Alternativ kann man auch so argumentieren: Ist $\left((y_n^{(m)})_n\right)_{m=1}^{\infty}$ eine Folge in $R(\ell^2) = \{(z_n)_n \in \ell^2;\ z_1 = 0\}$ mit Grenzwert $(y_n)_n$ in ℓ^2, so gilt insbesondere $y_1 = \lim_{m\to\infty} y_1^{(m)} = 0$ wegen der Stetigkeit der obigen Abbildung p_1 und daher auch $(y_n)_n \in \{(z_n)_n \in \ell^2;\ z_1 = 0\} = R(\ell^2)$.

Noch eine Alternative: Nach Teil a) ist $R : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (R(\ell^2), \|\cdot\|_2|_{R(\ell^2)})$ ein isometrischer und trivialerweise surjektiver Homomorphismus. Also sind ℓ^2 und $R(\ell^2)$ vermöge R isometrisch isomorph. Folglich ist mit ℓ^2 auch $R(\ell^2)$ vollständig und daher ist $R(\ell^2)$ auch in ℓ^2 abgeschlossen.

Wir behaupten nun, dass

$$R(\ell^2)^\perp = U := \{(z_n)_n \in \ell^2;\ z_n = 0 \text{ für alle } n \geq 2\}$$

erfüllt ist. Hierbei ist die Inklusion "$\supseteq$" unmittelbar klar. Sei nun $(z_n)_n \in R(\ell^2)^\perp$ beliebig. Dann gilt $(0, z_2, z_3, z_4, \ldots) \in R(\ell^2)$ und daher auch

$$0 = \big((0, z_2, z_3, z_4, \ldots)\big|(z_1, z_2, z_3, \ldots)\big) = \sum_{n=2}^{\infty} |z_n|^2,$$

was $z_n = 0$ für alle $n \geq 2$, also $(z_n)_n \in U$ impliziert.[11]

Eine kleine Alternative dieses Arguments sieht so aus: Sei nun $(z_n)_n \in R(\ell^2)^\perp$ beliebig. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt $e_k = R(e_{k-1}) \in R(\ell^2)$ mit $e_j := (\delta_{n,j})_n$ für $j \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $0 = ((z_n)_n|e_k) = z_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$.

Und noch eine kleine Variation: Ist $(z_n)_n \in R(\ell^2)^\perp$, so folgt wegen $R(\ell^2) = \{(y_n)_n \in \ell^2;\ y_1 = 0\}$ die Gleichung

$$((x_n)_n|(z_{n+1})_n) = ((0, x_1, x_2, x_3, \ldots)|(z_1, z_2, z_3, \ldots)) = 0$$

für alle $(x_n)_n \in \ell^2$, weshalb $(z_{n+1})_n \in (\ell^2)^\perp = \{0\}$ und daher auch $(z_n)_n \in U$ gilt.

Alternativ kann man auch folgendermaßen argumentieren: Es gilt offenbar $U \subseteq R(\ell^2)^\perp$. Nach dem Projektionssatz hat jede Folge $(x_n)_n \in \ell^2$ eine *eindeutige* Darstellung $(x_n)_n = (y_n)_n + (z_n)_n$ mit $(y_n)_n \in R(\ell^2)$ und $(z_n)_n \in R(\ell^2)^\perp$. Für $(x_n)_n \in R(\ell^2)^\perp$ gilt dann notwendigerweise

[11] Ein ähnliches Argument kann man heranziehen, um einen weiteren Beweis der Abgeschlossenheit von $R(\ell^2)$ zu geben. Wegen $R(\ell^2) = \{(y_n)_n \in \ell^2;\ y_1 = 0\}$ gilt offenbar $R(\ell^2) \subseteq U^\perp$. Ist nun $(y_n)_n \in U^\perp$, so gilt $(y_1, 0, 0, \ldots) \in U$ und daher auch $0 = ((y_n)_n|(y_1, 0, 0, \ldots))_2 = |y_1|^2$, was $(y_n)_n \in R(\ell^2)$ impliziert. Wir erhalten also insgesamt $R(\ell^2) = U^\perp$. Weil orthogonale Komplemente immer abgeschlossen sind, ist $R(\ell^2)$ abgeschlossen.

$(y_n)_n = 0$. Nun gilt allerdings für jedes $(x_n)_n \in R(\ell^2)^\perp$

$$(x_n)_n = \underbrace{(0, x_2, x_2, x_3, \dots)}_{\in R(\ell^2)} + \underbrace{(x_1, 0, 0, 0, \dots)}_{\in U \subseteq R(\ell^2)^\perp},$$

woraus nach dem gerade Gesagten $(0, x_2, x_2, x_3, \dots) = 0$ und daher auch $(x_n)_n = (x_1, 0, 0, 0, \dots) \in U$ folgt. Dies zeigt $R(\ell^2)^\perp \subseteq U$ und damit ebenso $R(\ell^2)^\perp = U$.[12]

zu c): Es seien $(x_n)_n, (y_n)_n \in \ell^2$ und $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$(R^m(x_n)_n|(y_n)_n)) = \big((\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ Stellen}}, x_1, x_2, \dots)\big|(y_n)_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_{n+m}$$

(wobei natürlich $\overline{y}_{n+m} = y_{n+m}$ gilt, falls der Grundkörper $\mathbb{R}$ ist). Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert nun

$$|(R^m(x_n)_n|(y_n)_n))| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_{n+m}\right| = \big|\big((x_n)_n\big|(y_{n+m})_n\big)\big| \leq \|(x_n)_n\|_2 \cdot \|(y_{n+m})_n\|_2.$$

Wegen

$$\|(y_{n+m})_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_{n+m}|^2 = \sum_{j=m+1}^{\infty} |y_j|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

folgt daher

$$\lim_{m\to\infty} \big(R^m(x_n)_n\big|(y_n)_n)\big) = 0$$

für alle $(x_n)_n, (y_n)_n \in \ell^2$.

Man kann diesen Beweis auch etwas anders aufziehen unter Verwendung abbrechender Folgen. Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y_n = 0$ für alle $n \geq n_0$, so folgt $(R^m(x_n)_n|(y_n)_n)_2 = 0$ für alle $m \geq n_0$ und es gilt daher $\lim_{m\to\infty}(R^m(x_n)_n|(y_n)_n)) = 0$. Sei nun $(y_n)_n \in \ell^2$ beliebig und $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim_{k\to\infty}\sum_{j=k}^{\infty}|y_j|^2 = 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|(y_n)_n - z\|_2 < \frac{\epsilon}{\|(x_n)_n\|_2+1}$, wobei $z = (y_1, \dots, y_k, 0, 0, \dots)$. Es folgt dann

$$\begin{aligned}
\big|\,(R^m(x_n)_n|(y_n)_n))\,\big| &\leq \big|\,(R^m(x_n)_n|z))\,\big| + \big|\,(R^m(x_n)_n|(y_n)_n - z))\,\big| \\
&\leq \big|\,(R^m(x_n)_n|z))\,\big| + \|R^m(x_n)_n\|_2 \cdot \|(y_n)_n - z\|_2 \\
&\leq \big|\,(R^m(x_n)_n|z))\,\big| + \|R\|^m \cdot \|(x_n)_n\|_2 \cdot \frac{\epsilon}{\|(x_n)_n\|_2 + 1} \\
&\leq \big|\,(R^m(x_n)_n|z))\,\big| + \epsilon,
\end{aligned}$$

[12] Diese einfache Argumentation ist im Grunde rein algebraischer Natur: Ist nämlich V ein Vektorraum über einem Körper K und sind X, Y und Z Unterräume von V mit $X \oplus Y = V = X \oplus Z$ und mit $Z \subseteq Y$, so gilt bereits $Z = Y$. In unserem Fall ist $K = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $V = \ell^2$, $X = R(\ell^2) = \{(y_n)_n \in \ell^2;\ y_1 = 0\}$, $Y = R(\ell^2)^\perp$ und $Z = U$.

woraus durch Grenzübergang $m \to \infty$ die Abschätzung $\overline{\lim}_{m\to\infty} \left| (R^m(x_n)_n|(y_n)_n) \right| \le \epsilon$ folgt. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{m\to\infty} (R^m(x_n)_n|(y_n)_n) = 0$.
Dieses Argument zeigt genauer, dass $\lim_{m\to\infty} (T^m(x_n)_n|(y_n)_n) = 0$ für alle $(x_n)_n, (y_n)_n \in \ell^2$ gilt, falls $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ der Bedingung $\|T^m\| \le 1$ für alle hinreichend großen $m \in \mathbb{N}$ genügt und die Gleichung $\lim_{m\to\infty} (T^m(x_n)_n|(y_n)_n) = 0$ zumindest für alle $(x_n)_n \in \ell^2$ und alle abbrechenden Folgen $(y_n)_n$ gilt. $\square$

Bemerkungen:

a) In Teil c) wurde zuweilen damit argumentiert, dass behauptet wurde, es gälte die Gleichung $\lim_{m\to\infty} R^m(x_n)_n = 0$ in ℓ^2. Tatsächlich gilt das jedoch *ausschließlich* für $(x_n)_n = 0$! Denn da R eine Isometrie ist, folgt mit Hilfe eines ganz simplen Induktionsbeweises $\|R^m(x_n)_n\|_2 = \|(x_n)_n\|_2$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Folglich gilt $\lim_{m\to\infty} R^m(x_n)_n = 0$ dann und nur dann, wenn auch $\lim_{m\to\infty}(x_n)_n = 0$ gilt, was aber, da hier die Folge gar nicht mehr von m abhängt, zu $(x_n)_n = 0$ äquivalent ist.

Es gilt zwar $\lim_{m\to\infty} x_n^{(m)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei hier $(x_n^{(m)})_n := R^m(x_n)_n$ gilt. Doch diese Eigenschaft genügt i. Allg. nicht, um daraus auf $\lim_{m\to\infty} \big((x_n^{(m)})_n \big| (y_n)_n\big) = 0$ für alle $(y_n)_n \in \ell^2$ zu schließen. Um das einzusehen, betrachten wir

$$(x_n^{(m)})_n := \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ Stellen}}, \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \ldots\Big).$$

Dann gilt offenkundig $\lim_{m\to\infty} x_n^{(m)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Doch für $(y_n)_n := (\frac{1}{n})_n$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(m)} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n(n+m)} = m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\frac{m}{n}+1} \ge \frac{m}{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

was $\underline{\lim}_{m\to\infty}((x_n^{(m)})_n|(y_n)_n) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > 0$ nach sich zieht.

b) Ein weiterer Ansatz, an den man vielleicht zunächst naiv denken könnte, besteht darin, zu untersuchen, für welche $(x_n)_n$ die Folge $(R^m(x_n)_n)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ^2 ist. Allerdings ist dieser Ansatz überhaupt nicht hilfreich, denn $(R^m(x_n)_n)_{m\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchyfolge in ℓ^2, wenn $(x_n)_n = 0$ gilt! Sei nämlich $(x_n)_n \neq 0$ und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} \neq 0$. Wäre $(R^m(x_n)_n)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ^2, so gäbe es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|R^m(x_n)_n - R^l(x_n)_n\|_2 < |x_{n_0}|$ für alle $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l, m \ge m_0$. Insbesondere erhielte man dann den Widerspruch

$$|x_{n_0}| > \|R^{m_0}(x_n)_n - R^{m_0+n_0}(x_n)_n\|_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\big((\underbrace{0,\ldots,0}_{m_0 \text{ Stellen}}, x_1, x_2, \ldots) - \big((\underbrace{0,\ldots,0}_{m_0 \text{ Stellen}}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n_0 \text{ Stellen}}, x_1, x_2, \ldots)\|_2 \\
&= \|\big((\underbrace{0,\ldots,0}_{m_0 \text{ Stellen}}, x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, x_{n_0+1} - x_1, x_{n_0+2} - x_2, \ldots)\|_2 \\
&= \left(\sum_{n=1}^{n_0} |x_n|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_0+k} - x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq |x_{n_0}|.
\end{aligned}
$$

Angesichts dieser Beobachtung ist das Ergebnis in Teil c) der Aufgabe durchaus ein wenig verblüffend.

Aufgabe 6

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein separabler Hilbertraum und $T := \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

a) T ist eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.

b) Ist S ein weiteres Orthonormalsystem und gilt $T \subseteq S$, so gilt schon $T = S$.

***Lösungsvorschlag*:**

Es gelte zunächst a) und es sei S ein Orthonormalsystem mit $T \subseteq S$. Gäbe es ein $v \in S \setminus T$, so erhielten wir mit Satz 9.9 (4) aus der Vorlesung (da S ein Orthonormalsystem ist)

$$v \in T^\perp = \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$$

und damit den Widerspruch $0 = \|v\| = 1$.
Es gelte nun umgekehrt b). Wegen Satz 9.9 (4) aus der Vorlesung genügt es, $\{e_n|\ n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ zu zeigen, um T als Orthonormalbasis zu erkennen. Gäbe es ein $u \in \{e_n|\ n \in \mathbb{N}\}^\perp \setminus \{0\}$, so wäre

$$S := \{e_n|\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\|u\|^{-1}u\}$$

ein Orthonormalsystem mit $T \subsetneq S$ (denn $\|u\|^{-1}u \in T$ würde wegen $u \in T^\perp$ den Widerspruch $1 = \|u\|^{-2}\|u\|^2 = \|u\|^{-1}(\|u\|^{-1}u|u) = 0$ implizieren), was nach Voraussetzung nicht möglich ist. $\square$

***Bemerkungen*:**

a) Einige haben beim Beweis der Implikation "b) $\Longrightarrow$ a)" so argumentiert:

"*Das Orthonormalsystem T lässt sich zu einer Orthonormalbasis S erweitern. Die Bedingung in b) impliziert dann $T = S$ und T ist somit als Orthonormalbasis erkannt.*"

Diese Argumentation ist zwar korrekt, fußt aber ganz wesentlich auf der (im Unendlichdimensionalen) nicht unmittelbar offenkundigen Aussage, dass sich Orthonormalsysteme zu Orthonormalbasen fortsetzen lassen. Diese Aussage wurde jedoch weder in der Vorlesung noch in der Übung bewiesen. Hier ist eine Beweis*skizze*:

Es sei $V := \overline{\mathrm{LH}(T)}$. Ist $V = \mathcal{H}$, so sind wir fertig. Sei also $V \neq \mathcal{H}$. Dann ist $V^\perp$ als

Unterraum eines separablen Raumes selbst separabel[13] und besitzt daher eine endliche oder abzählbar unendliche Orthonormalbasis $\{u_j\}_{j\in J}$ (mit $\emptyset \neq J \subseteq \mathbb{N}$). Dann ist $S := \{e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{u_j;\ j \in J\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Sei nämlich $x \in \mathcal{H}$ beliebig mit $x \in S^\perp$. Wegen $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $v \in V$ und $u \in V^\perp$ mit $x = v + u$. Nach Definition von V ist T eine Orthonormalbasis von V. Daher folgt (unter Ausnutzung von $u \in V^\perp$)

$$v = \sum_{n=1}^{\infty}(v|e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(v+u|e_n)e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x|e_n)e_n = 0.$$

Entsprechend erhält man

$$u = \sum_{j\in J}^{\infty}(u|u_j)u_j = \sum_{j\in J}^{\infty}(v+u|u_j)u_j = \sum_{j\in J}^{\infty}(x|u_j)u_j = 0.$$

Folglich gilt $x = u + v = 0$. Wir haben also $S^\perp = \{0\}$ gezeigt, woraus gemäß Satz 9.9 (4) aus der Vorlesung folgt, dass S eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist.

b) Zuweilen wurde behauptet, dass eine Orthonormalbasis B von $\mathcal{H}$ jedes Orthonormalsystem S von $\mathcal{H}$ enthalte. Das ist jedoch gänzlich falsch, wie schon das einfache Beispiel $\mathcal{H} = \mathbb{K}$, $B = \{1\}$, $S = \{-1\}$ zeigt; diese Annahme beruht wohl auf einer völlig falschen Vorstellung von der Maximalität einer Orthonormalbasis. Die korrekte Formulierung lautet:

Bezeichnet $\preceq$ die von der mengentheoretischen Inklusion auf der Menge $\mathrm{ONS}(\mathcal{H})$ aller Orthonormalsysteme von $\mathcal{H}$ induzierte partielle (!) Ordnung, so ist ein Element $T \in \mathrm{ONS}(\mathcal{H})$ genau dann bzgl. $\preceq$ maximal (d.h., es gibt kein $S \in \mathrm{ONS}(\mathcal{H}) \setminus \{T\}$ mit $T \preceq S$), wenn T eine Orthonormalbasis ist.

Das ist jedoch lediglich eine ordnungstheoretische Umformulierung der in der Aufgabe zu beweisenden Aussage. Man kann im Übrigen diese ordnungstheoretische Charakterisierung nun umgekehrt zum Anlass nehmen, um die Existenz von Orthonormalbasen (auch ohne Separabilitätsvoraussetzung) mit Hilfe des Zornschen Lemmas zu beweisen.

[13] Das ist selbst wieder eine beweisbedürftige Aussage!

Aufgabe 7

a) Formulieren Sie den Satz von der Besselschen Ungleichung aus der Vorlesung.

b) Es sei $f \in L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$. Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt.

***Lösungsvorschlag*:**

zu a): Der Satz von der Besselschen Ungleichung aus der Vorlesung lautet wie folgt:

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot\cdot))$ ein Innenproduktraum (über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$) und $\{u_n|\ n \in I\}$ mit $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{N}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\in I}}^{\infty} |(x|u_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathcal{H}$, wobei $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$ für $x \in \mathcal{H}$.

zu b): Es sei $f \in L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ beliebig. Wir setzen $e_n(t) := \mathrm{e}^{-int}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,2\pi]$. Laut Vorlesung bildet die Menge

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e_n;\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

ein Orthonormalsystem in $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$. Dies trifft dann aber ebenso auf jede ihrer nichtleeren Teilmengen (also auch auf $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e_{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$) zu. Daher gilt nach dem Satz von der Besselschen Ungleichung

$$\|f\|_{L^2}^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e_{-n} \right)_{L^2} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} f(t)\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-int}}\,\mathrm{d}t \right|^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \right|^2,$$

was $\left(\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ impliziert. Da nun aber jede quadratsummierbare Folge eine Nullfolge ist, erhalten wir hieraus $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0$ wie behauptet. $\square$

***Bemerkungen*:**

a) Da in der Vorlesung hauptsächlich Hilberträume betrachtet wurden, ist es in Teil a) noch verzeihlich, wenn anstelle eines Inneproduktraumes gleich schon ein Hilbertraum betrachtet wird.[14]

[14] Es sei außerdem bemerkt, dass man aus dieser scheinbar schwächeren Version auch leicht die obige Version der Besselschen Ungleichung erhält, da jeder Innenproduktraum, wie man zeigen kann, isometrisch isomorph zu einem dichten Unterraum eines Hilbertraumes ist.

Allerdings gab es sehr wohl einen Punktabzug, wenn von einer Orthonormalbasis in einem Hilbertraum statt von einem Orthonormalsystem die Rede war, da $\mathcal{H}$ dann implizit als separabel vorausgesetzt wird und zudem die Besselsche Ungleichung in dieser jedenfalls *formal* schwächeren Formulierung a priori in ihren Anwendungsmöglichkeiten eingeschränkt wird; so ist es z.B. ein leichtes, von dem in Teil b) betrachteten Orthonormalsystem $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e_n;\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ einzusehen, dass es wirklich ein Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ist. Dass es sich hierbei sogar um eine Orthonormalbasis handelt, ist hingegen eine viel delikatere Angelegenheit! Darüber hinaus ist die Besselsche Ungleichung für Orthonormalbasen weit weniger interessant, da ja für diese sogar die Parsevalsche Gleichung gilt!

Diese Formulierung ist aber, wie wir bereits betont haben, lediglich formal schwächer in dem Sinne, dass man tatsächlich hieraus die Besselsche Ungleichung in der Formulierung des Lösungsvorschlages für separable Hilberträume erhalten kann, indem man ausnutzt, dass sich jedes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis fortsetzen lässt (siehe Bemerkung a) zu Aufgabe 6): Sei nämlich die Besselsche Ungleichung schon für Orthonormalbasen gezeigt, sei ferner $\{u_n |\ n \in I\}$ wie in Teil a) und $\{v_m |\ m \in J\}$ mit $\emptyset \neq J \subseteq \mathbb{N}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ derart, dass $\{u_n |\ n \in I\} \cup \{v_m |\ m \in J\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist (der Fall $J = \emptyset$ ist schon abgedeckt). Dann folgt

$$\|x\|^2 \geq \sum_{\substack{n=1 \\ n \in I}}^{\infty} |(x|u_n)|^2 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \in I}}^{\infty} |(x|v_m)|^2 \geq \sum_{\substack{n=1 \\ n \in I}}^{\infty} |(x|u_n)|^2$$

für alle $x \in \mathcal{H}$.

Noch kritischer wird es jedoch, wenn in der Formulierung einerseits von einer Orthonormalbasis $\{u_n |\ n \in I\}$ die Rede ist und andererseits lediglich ein Innenproduktraum vorausgesetzt wird. Dann ist es nämlich von hoher Bedeutung, dass die Orthonormalbasis $\{u_n |\ n \in I\}$ abzählbar ist. Denn es gibt (sogar im Rahmen der sog. Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ohne Auswahlaxiom)) nicht-separable Innenprodukträume, die keine Orthonormalbasis besitzen,[15] wobei wir an dieser Stelle nicht auf die genaue Definition einer Orthonormalbasis in einem nicht-separablen Innenproduktraum eingehen.

[15] Natürlich kann ein solcher Innenproduktraum nicht separabel sein, da man in jedem separablen (nicht notwendigerweise vollständigen) Innenproduktraum mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis finden kann (das geht aus dem Beweis zu Satz 9.10 der Vorlesung hervor, auch wenn dieser Satz dort lediglich für Hilberträume ausgesprochen wird).

Diese schwächere Version des Satzes von der Besselschen Ungleichung ist also in solchen Räumen buchstäblich bedeutungslos!

b) Ist $\{u_i;\ i \in I\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ mit einer nichtleeren, möglicherweise überabzählbaren Indexmenge I, so gilt die Besselsche Ungleichung in der Form

$$\sup_{J \subseteq I \text{ endlich}} \sum_{i \in J} |(x|u_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathcal{H}$. Ist nämlich $x \in \mathcal{H}$ beliebig und J eine beliebige nichtleere, aber endliche Teilmenge von I, so liefert die Besselsche Ungleichung angewandt auf das endliche Orthonormalsystem $\{e_j;\ j \in J\}$ die Abschätzung $\sum_{i \in J} |(x|u_i)|^2 \leq \|x\|^2$, woraus die Behauptung durch Übergang zum Supremum bezüglicher aller endlichen Teilmengen $J \subseteq I$ folgt.

c) Einige haben versucht, den Teil b) ohne Verwendung der Besselschen Ungleichung zu beweisen und haben hierbei fast durchweg partiell integriert, was jedoch auf die in den Bearbeitungen vorgebrachte Weise nicht möglich ist, da ja f als bloße L^2-Funktion keine (schwache) Ableitung zu besitzen braucht. Man kann diese Idee jedoch mit einem Approximationsargument auf feste Füße stellen: Es sei $f \in \mathrm{C}_0^\infty((0, 2\pi), \mathbb{C})$. Dann liefert partielle Integration

$$\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{1}{in}\mathrm{e}^{int}\right]_0^{2\pi} + \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t.$$

Hieraus ergibt sich alsdann

$$\left|\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \left|f'(t)\mathrm{e}^{int}\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\|f'\|_{L^1},$$

was $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0$ impliziert. Ist nun $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ beliebig, so existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $f_m \in \mathrm{C}_0^\infty((0, 2\pi), \mathbb{C})$ mit $\|f - f_m\|_{L^2} < \frac{1}{m}$. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \left|\int_0^{2\pi} (f(t) - f_m(t))\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^{2\pi} f_m(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left(\int_0^{2\pi} |f(t) - f_m(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{e}^{-int}\right|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\int_0^{2\pi} f_m(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \sqrt{2\pi}\|f - f_m\|_{L^2} + \left|\int_0^{2\pi} f_m(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\sqrt{2\pi}}{m} + \left|\int_0^{2\pi} f_m(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right|,
\end{aligned}$$

wobei wir bei der zweiten Abschätzung die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt haben. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt hieraus nun

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{m}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, was schließlich die Behauptung $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0$ liefert.

d) Die Aussage von Teil b) der Aufgabe gilt allgemeiner für $f \in L^1([0,2\pi],\mathbb{C})$. Das sieht man leicht mit Hilfe eines Approximationsarguments wie in Teil a) dieser Bemerkungen (dabei ist der Gebrauch der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung durch das Anwenden der Hölder-Ungleichung zu ersetzen).

Aufgabe 8

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum und $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ kompakt und symmetrisch mit $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{1\}$.[16] Zeigen Sie, dass T dann eine Orthogonalprojektion ist.

***1. Lösungsvorschlag*:**

Für alle $x \in \mathcal{H}$ und $y \in \mathrm{N}(T)$ gilt $(Tx|y) = (x|Ty) = (x|0) = 0$ und folglich $T(\mathcal{H}) \perp \mathrm{N}(T)$. Es ist daher lediglich $T^2 = T$ zu zeigen.[17] Nach dem Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren (und wegen der Separabilität des unendlichdimensionalen Raumes $\mathcal{H}$) existiert eine Orthonormalbasis $\{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}$ und eine reelle Nullfolge $(\lambda_n)_n$ derart, dass

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|u_n) u_n$$

für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt. Wegen $\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{1\}$ und wegen $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ können nur endlich viele Folgenglieder $\lambda_{n_1}, \ldots, \lambda_{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ von 0 veschieden sein und diese sind dann gleich 1. Wir erhalten daher

$$Tx = \sum_{j=1}^{k} (x|u_{n_j}) u_{n_j}$$

für alle $x \in \mathcal{H}$. Damit folgt nun

$$\begin{aligned} T^2x = T(Tx) = \sum_{j=1}^{k} (Tx|u_{n_j}) u_{n_j} = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\nu=1}^{k} (x|u_{n_\nu}) u_{n_\nu} \middle| u_{n_j} \right) u_{n_j} &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} (x|u_{n_\nu})(u_{n_\nu}|u_{n_j}) u_{n_j} \\ &= \sum_{j=1}^{k} (x|u_{n_j}) u_{n_j} = Tx \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{H}$, also $T^2 = T$.

***2. Lösungsvorschlag*:**

Für alle $x \in \mathcal{H}$ und $y \in \mathrm{N}(T)$ gilt $(Tx|y) = (x|Ty) = (x|0) = 0$ und folglich $T(\mathcal{H}) \perp \mathrm{N}(T)$. Es ist daher lediglich $T^2 = T$ zu zeigen. Nach dem Spektralsatz für kompakte symmetrische

[16] Diese Bedingung besagt *nicht*, dass 0 kein Eigenwert ist, sondern dass 1 sicher ein Eigenwert ist und dass sonst allenfalls noch 0 ein Eigenwert ist. A posteriori stellt sich dann heraus, dass 0 *tatsächlich* ein Eigenwert ist (siehe die anschließenden Bemerkungen).

[17] vgl. auch Aufgabe 37 a)

Operatoren (und wegen der Separabilität des unendlichdimensionalen Raumes $\mathcal{H}$) existiert eine Orthonormalbasis $\{u_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren von T. Ist 0 ein Eigenwert von T und ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert 0, so gilt $T^2x = T(Tx) = T(0) = 0 = Tx$. Und ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, so gilt $T^2x = T(Tx) = Tx$. Da nun aber allenfalls 0 und 1 als Eigenvektoren auftreten können, erhalten wir (mit der Stetigkeit von T)

$$T^2x = T^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)T^2u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)Tu_n = T\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x|u_n)u_n\right) = Tx$$

für alle $x \in \mathcal{H}$, also $T^2 = T$.

***3. Lösungsvorschlag*:**

Es bezeichne Φ_T den beschränkten Funktionalkalkül zu T aus Aufgabe 50. Nach Voraussetzung gilt (wir benutzen die Notation aus Aufgabe 50) $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} = \{0,1\}$, was $\mathrm{id}_{\sigma(T)} = \mathbb{1}_{\{1\}}$ impliziert. Nach Aufgabe 50 b)(i) gilt daher $T = \Phi_T(\mathrm{id}_{\sigma(T)}) = \Phi_T(\mathbb{1}_{\{1\}})$ und nach Aufgabe 50 e) ist $\Phi_T(\mathbb{1}_{\{1\}})$ und somit auch T eine orthogonale Projektion. $\square$

***Bemerkungen*:**

a) Der erste Lösungsvorschlag liefert zusätzlich $\sigma_p(T) = \{0,1\}$, denn es gilt etwa $Tu_m = \sum_{j=1}^{k}(u_m|u_{n_j})u_{n_j} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}$. Genauer gilt sogar

$$\mathrm{N}(T) = \overline{\mathrm{LH}\{u_n;\ n \in \mathbb{N} \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}\}}$$

nach Aufgabe 49 a). Man beachte hierbei noch, dass ein kompakter, symmetrischer Operator die Zahl 0 i. Allg. nicht als Eigenwert zu haben braucht![18] Die Gleichung $\sigma_p(T) = \{0,1\}$ ist also eine Folgerung aus der Kompaktheit, der Symmetrie und der Voraussetzung $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{1\}$ und keine der ersten beiden Bedingungen kann ersatzlos gestrichen werden!

So ist etwa $I_{\mathcal{H}}$ symmetrisch (aber nicht kompakt, da $\dim \mathcal{H} = \infty$) mit $\sigma_p(I_{\mathcal{H}}) = \{1\}$ (insbesondere gilt $\sigma_p(I_{\mathcal{H}}) \setminus \{0\} = \{1\}$).

Wir betrachten nun außerdem den Volterra-Operator

$$S : L^2[0,1] \to L^2[0,1];\ f \mapsto Sf$$

[18]Betrachte z.B. $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ aus Aufgabe 48 mit $p = 2$ und mit einer Nullfolge $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt lediglich stets $0 \in \sigma(T)$, falls $\dim \mathcal{H} = \infty$ erfüllt ist und T kompakt ist, wobei $\sigma(T)$ durch die rechte Seite der Gleichung in Aufgabe 50 f) definiert sei.

mit

$$Sf(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dieser ist kompakt[19]mit $\sigma_p(S) = \emptyset$.[20] Auf $\mathcal{H} := L^2[0,1] \times \mathbb{K}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ wird vermöge

$$\big((f,(z_1,\ldots,z_d))\big|(g,(w_1,\ldots,w_d))\big)_{\mathcal{H}} := (f|g) + \sum_{j=1}^{d} z_j\overline{w_j}$$

ein Skalarprodukt definiert, welches $\mathcal{H}$ zu einem Hilbertraum macht.

Sei nun $d = 1$. Die Abbildung

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H};\ (f,z) \mapsto (Sf,z)$$

ist, wie man leicht einsieht, kompakt mit $\sigma_p(T) = \sigma_p(S) \cup \sigma_p(I_{\mathbb{K}}) = \{1\}$ (insbesondere gilt auch hier $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{1\}$). Nach dem Ergebnis der Aufgabe kann T jedoch nicht symmetrisch sein (was man auch direkt verifizieren kann).

b) Für $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ impliziert eine Bedingung der Form $\sigma_p(T) \subseteq \{0,1\}$ alleine i. Allg. *nicht* $T^2 = T$, nicht einmal, wenn T zusätzlich als kompakt vorausgesetzt wird. Sei etwa S wieder der (kompakte) Volterra-Operator (mit $\sigma_p(S) = \emptyset$) und $\mathcal{H} = L^2[0,1] \times \mathbb{K}$. Dann gilt $S\mathbb{1} = \mathrm{id}_{[0,1]}$ und somit $S^2\mathbb{1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{id}_{[0,1]}^2 \neq \mathrm{id}_{[0,1]} = S\mathbb{1}$, was $S^2 \neq S$ zeigt. Ferner sind die Operatoren

$$T_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H};\ (f,z) \mapsto (Sf,0)$$

und

$$T_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H};\ (f,z) \mapsto (Sf,z),$$

[19] siehe Zusatzmaterial der Vorlesung zum Thema Integraloperatoren

[20] *Beweisskizze*: Sei $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $f \in \mathrm{N}(\lambda - S)$. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert $S(L^2[0,1]) \subseteq \mathrm{C}[0,1]$. Aus $\lambda f = Sf$ folgt daher wegen $\lambda \neq 0$, dass $f \in \mathrm{C}[0,1]$ gilt. Nun kann man wie in Aufgabe 36 b) zeigen, dass $f = 0$ gilt. Ist jetzt $f \in \mathrm{N}(S)$, so gilt $Sf(x) = 0$ für Lebesgue-fast alle $x \in [0,1]$ und da Sf stetig ist, ergibt sich hieraus bereits $Sf(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Dies impliziert

$$0 = (Sf)(b) - (Sf)(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t) \cdot \overline{\mathbb{1}_{\langle a,b\rangle}(t)}\,\mathrm{d}t = (f|\mathbb{1}_{\langle a,b\rangle})$$

für alle $0 \leq a \leq b \leq 1$, wobei $\langle a,b\rangle \in \{[a,b],[a,b),(a,b],(a,b)\}$ beliebig; es gilt also

$$f \in \{\mathbb{1}_{\langle a,b\rangle};\ 0 \leq a \leq b \leq 1\}^{\perp} = \overline{\mathrm{LH}\{\mathbb{1}_{\langle a,b\rangle};\ 0 \leq a \leq b \leq 1\}}^{\perp}.$$

Jede auf $[0,1]$ stetige Funktion ist sogar gleichmäßiger Limes einer Folge aus $\mathrm{LH}\{\mathbb{1}_{\langle a,b\rangle};\ 0 \leq a \leq b \leq 1\}$, also erst recht im Sinne der L^2-Konvergenz auf $[0,1]$, was zusammen mit Satz 11.1 aus der Vorlesung $\overline{\mathrm{LH}\{\mathbb{1}_{\langle a,b\rangle};\ 0 \leq a \leq b \leq 1\}} \supseteq \overline{\mathrm{C}[0,1]} = L^2[0,1]$ und damit $f \in L^2[0,1]^{\perp} = \{0\}$ liefert.

wie man leicht bestätigt, kompakt mit $\sigma_p(T_j) = \{j\}$ für $j \in \{0,1\}$. Es gilt jedoch $T_j^2(\mathbb{1},0) = (S^2\mathbb{1},0) \neq (S\mathbb{1},0) = T_j(\mathbb{1},0)$, was $T_j^2 \neq T_j$ impliziert. Schließlich betrachten wir $\mathcal{H}' := L^2[0,1] \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ und den Operator

$$T_2 : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}';\ (f,z,w) \mapsto (Sf,z,0).$$

Dieser ist kompakt mit $\sigma_p(T_2) = \{0,1\}$. Doch wie eben zeigt man, dass $T_2^2 \neq T_2$ gilt.

Ein Nachweis der Aussage $T^2 = T$ in der obigen Aufgabenstellung muss also *notwendigerweise* die Symmetrie des Operators T (bzw. eine Folgerung hieraus) heranziehen!

c) Der erste Lösungsvorschlag zeigt außerdem, dass in der Situation der Aufgabenstellung $\dim T(\mathcal{H}) < \infty$ gilt; insbesondere ist $T(\mathcal{H})$ in $\mathcal{H}$ abgeschlossen. Letzteres folgt aber *nicht* alleine aus der Kompaktheit. Tatsächlich kann man zeigen, dass ein kompakter Operator dann und nur dann ein abgeschlossenes Bild hat, wenn dieses bereits endlichdimensional ist.

d) Der zweite Lösungsansatz funktioniert auch dann noch, wenn die Kompaktheitsvoraussetzung durch die Annahme der Existenz einer Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren von T ersetzt wird.[21]

e) Der dritte Lösungsansatz schließlich gestattet im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine Verallgemeinerung auf den Fall, dass die Kompaktheitsannahme *ersatzlos* gestrichen wird und $\sigma(T) \subseteq \{0,1\}$ anstelle von $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{1\}$ gefordert wird, wobei $\sigma(T)$ durch die rechte Seite der Gleichung in Aufgabe 50 f) definiert sei.[22] Allerdings ist in dieser allgemeineren Situation die Existenz eines geeigneten Funktionalkalküls keineswegs mehr offensichtlich!

Man kann diese Beobachtung sogar zu zwei Charakterisierungen von Orthogonalprojektionen ausbauen:

- Ein linearer Operator $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn er symmetrisch ist und $\sigma(T) \subseteq \{0,1\}$ erfüllt.
- Ein linearer Operator $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \setminus \{0, I_{\mathcal{H}}\}$ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn er symmetrisch ist und $\sigma(T) = \{0,1\}$ erfüllt.

[21] Diese schwächere Bedingung erfüllt beispielsweise jeder der Operatoren $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ aus Aufgabe 48 (wobei $p = 2$) mit einer beschränkten Folge $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbb{K}$; Kompaktheit liegt hier nach Aufgabe 48 jedoch ausschließlich für Nullfolgen vor.

[22] Der Fall $\sigma(T) = \emptyset$ kann hierbei nicht auftreten; der Nachweis dieser Ausage ist jedoch nicht ganz trivial.

f) Vielfach war in den Bearbeitungen etwas in der Art von

"*Da $\mathcal{H}$ separabel ist, existiert nach dem Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren wegen $T \neq 0$ (da ja $1 \in \sigma_p(T)$) eine Orthonormalbasis $\{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren von T.*"

zu lesen. Es ist hierbei aber völlig überflüssig $T \neq 0$ zu betonen. Für den Nulloperator ist nämlich trivialerweise jede Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ zugleich eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren des Nulloperators.