KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE WS 2013/14
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

Differentialgleichungen und Hilberträume

Lösungsvorschlag zur Nachklausur vom 25.02.2014

Nachfolgend finden sich Lösungsvorschläge (z.T. mit Lösungsalternativen) zu den Nachklausuren "Differentialgleichungen" und "Differentialgleichungen und Hilberträume" vom 25.02.2014. Daneben gibt es noch einige ergänzende Bemerkungen.

1. Teil: Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie ein nichtkonstantes erstes Integral für das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{e}^{y(t)} \cos(y(t)), \\ y'(t) = -\mathrm{e}^{x(t)} \sin(x(t)). \end{cases}$$

***Lösungsvorschlag*:**

Da es sich hier um ein zweidimensionales System handelt, verfolgen wir den üblichen Ansatz, eine von der Nullfunktion verschiedene reellwertige C^1-Funktionen λ derart zu finden, dass die Integrabilitätsbedingung $-(\lambda h)_y = (\lambda g)_x$ mit $g(x,y) = \mathrm{e}^y \cos(y)$ und $h(x,y) = -\mathrm{e}^x \sin(x)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ erfüllt ist, um anschließend ein erstes Integral H aus der Forderung

$$H'(x,y) = \nabla H(x,y)^T = \lambda(x,y)(-h(x,y), g(x,y))$$

zu ermitteln. Für ein solches λ gilt

$$-\frac{\partial(\lambda h)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \lambda}{\partial y}(x,y)\mathrm{e}^x \sin(x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^x \sin(x)\right)\lambda(x,y) = \frac{\partial \lambda}{\partial y}(x,y)\mathrm{e}^x \sin(x)$$

sowie

$$\frac{\partial(\lambda g)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y)\mathrm{e}^y\cos(y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^y\cos(y)\right)\lambda(x,y) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y)\mathrm{e}^y\cos(y).$$

Die Integrabilitätsbedingung ist hier also zu

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}(x,y)\mathrm{e}^x\sin(x) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,y)\mathrm{e}^y\cos(y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

äquivalent. Hieraus ersehen wir, dass wir mit der Wahl $\lambda\equiv 1$ die Integrabilitätsbedingung erfüllen können.

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int \mathrm{e}^y\cos(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^y\sin(y) - \int \mathrm{e}^y\sin(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^y(\sin(y)+\cos(y)) - \int \mathrm{e}^y\cos(y)\,\mathrm{d}y$$

und hieraus sodann

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^y(\sin(y)+\cos(y))\right) = \mathrm{e}^y\cos(y) = g(x,y) = \lambda(x,y)g(x,y).$$

Deshalb machen wir nun den Ansatz

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^y(\sin(y)+\cos(y)) + c(x)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c. Die Forderung $\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda h = -h$ führt dann zu

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = c'(x) = \mathrm{e}^x\sin(x).$$

Wiederum mit partieller Integration erhalten wir

$$\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x\cos(x) + \int \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(\sin(x)-\cos(x)) - \int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Wahl $c(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x)-\cos(x))$ erhalten wir sodann

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^y(\sin(y)+\cos(y)) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x)-\cos(x))$$

als ein nichtkonstantes erstes Integral zu dem gegebenen Differentialgleichungssystem. $\square$

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ lokal Lipschitz-stetig und die Menge $f^{-1}(\{0\})$ besitze eine unendliche, beschränkte Teilmenge. Zeigen Sie, dass die autonome Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x(t))$$

mindestens eine Gleichgewichtslösung besitzt, die nicht asymptotisch stabil ist.

***Lösungsvorschlag*:**

Es sei $M \subseteq f^{-1}(\{0\})$ eine unendliche und beschränkte Menge. Dann existiert auch eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to M$ bzw. (mit anderen Worten ausgedrückt) eine Folge $(x_n)_n$ in M derart, dass $x_n \neq x_m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt. Da mit M auch die Folge $(x_n)_n$ beschränkt ist, dürfen wir gemäß dem Satz von Bolzano-Weierstraß nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass $(x_n)_n$ gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f und wegen $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

und erkennen, dass x_0 ein Equilibrium ist.
Wir zeigen nun mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises, dass x_0 nicht asymptotisch stabil ist, und nehmen zu diesem Zwecke an, dass x_0 doch asymptotisch stabil sei. Insbesondere existiert dann ein $\delta > 0$ derart, dass jede Lösung x der autonomen Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$, die in einer Umgebung von 0 definiert ist und der Bedingung $|x(0) - x_0| < \delta$ genügt, bereits global nach rechts existiert und $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$ erfüllt. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und wegen $x_n \neq x_m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < |x_n - x_0| < \delta$, was nach dem gerade Gesagten den Widerspruch $x_0 = \lim_{t\to\infty} x_n = x_n \neq x_0$ impliziert.
Mithin war unsere Annahme falsch und wir erhalten, dass x_0 nicht asymptotisch stabil ist. $\square$

Bemerkung: Der Beweis zeigt eigentlich genauer, dass jeder Häufungspunkt der Menge aller Equilibria selbst eine Gleichgewichtslösung ist, die nicht asymptotisch stabil (genauer: nicht attraktiv) ist. In Aufgabe 2 der Hauptklausur hatte die Menge der Equilibria die Gestalt $\{(s, s^2);\ s \geq 0\}$. Da hier jeder Punkt Häufungspunkt dieser Menge ist, folgt also sofort (ohne das Prinzip der linearisierten Stabilität heranzuziehen), dass keiner der stationären Punkte asymptotisch stabil ist (damit ist aber natürlich noch nichts über die Stabilität ausgesagt.)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = \mathrm{e}^t, & 0 \le t \le 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

***Lösungsvorschlag*:**

Wir betrachten zunächst die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) + u(t) = 0.$$

Ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung ist z.B. $\{\sin, \cos\}$. Ferner sieht man unmittelbar ein, dass $t \mapsto \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^t$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$u''(t) + u(t) = \mathrm{e}^t$$

ist. Jede Lösung u zu der vorgenannten inhomogenen Differentialgleichung hat demnach die Form

$$u(t) = a\sin(t) + b\cos(t) + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^t$$

für gewisse Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Nun müssen noch die Randbedingungen erfüllt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{matrix}\right\} &\iff \left\{\begin{matrix} b + \frac{1}{2} = 0 \\ a\sin(1) + b\cos(1) + \frac{\mathrm{e}}{2} = 0 \end{matrix}\right\} \\ &\iff \left\{\begin{matrix} b = -\frac{1}{2} \\ a\sin(1) = \frac{\cos(1)}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} \end{matrix}\right\} \\ &\iff \left\{\begin{matrix} a = \frac{\cos(1)-\mathrm{e}}{2\sin(1)} \\ b = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$u(t) = \frac{\cos(1) - \mathrm{e}}{2\sin(1)} \cdot \sin(t) - \frac{1}{2} \cdot \cos(t) + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^t \qquad (t \in [0, 1])$$

die einzige Lösung des gegebenen Randwertproblems. $\square$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Greensche Funktion für die nachfolgende Randwertaufgabe.

$$\begin{cases} u''(t) = 0, & 0 \le t \le \pi, \\ u(0) = u(\pi) + u'(\pi) = 0. \end{cases}$$

***Lösungsvorschlag*:**

Ein Fundamentalsystem der linearen homogenen Differentialgleichung $u''(t) = 0$ ist beispielsweise $\{u_1, u_2\}$ mit $u_1(t) = t$ und $u_2(t) = 1$ ($t \in [0, \pi]$). Wir setzen nun $R_0(u) := u(0)$ sowie $R_\pi(u) := u(\pi) + u'(\pi)$ ($u \in \mathrm{C}^1([0, \pi])$). Dann gilt

$$R_0(u_1) \cdot R_\pi(u_2) - R_0(u_2) \cdot R_\pi(u_1) = 0 \cdot 1 - 1 \cdot (\pi + 1) \neq 0,$$

woraus gemäß Satz 5.2 der Vorlesung folgt, dass die vorgelegte Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist; insbesondere existiert eine Greensche Funktion.
Wir betrachten nun $u(t) := t$ sowie $v(t) := t - \pi - 1$ ($t \in [0, \pi]$). Offenkundig ist dann auch $\{u, v\}$ ein Fundamentalsystem zu $u''(t) = 0$, welches zudem $R_0(u) = 0$ und $R_\pi(v) = 0$ erfüllt. Es gilt

$$v'(0)u(0) - u'(0)v(0) = -(-\pi - 1) = \pi + 1,$$

sodass die gesuchte Greensche Funktion G laut Vorlesung durch

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\pi+1} \left(t - \pi - 1\right), & \text{falls } 0 \le \tau \le t \le \pi, \\ \frac{t}{\pi+1} \left(\tau - \pi - 1\right), & \text{falls } 0 \le t \le \tau \le \pi, \end{cases}$$

gegeben ist. $\square$

2. Teil: Hilberträume

Aufgabe 5

Es sei $c := \{(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existiert}\}$ und $c_0 := \{(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Durch $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ $((x_n)_n \in c)$ wird auf c eine Norm definiert (das brauchen Sie nicht zu zeigen), sodass $(c, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist (das brauchen Sie ebenfalls nicht zu zeigen).

a) Beantworten Sie die folgende Frage und begründen Sie Ihre Antwort:

Ist der normierte Raum $(c, \|\cdot\|_\infty)$ ein Innenproduktraum?

b) Zeigen Sie, dass $\varphi : c \to \mathbb{K};\ (x_n)_n \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ ein stetiger linearer Operator ist und berechnen Sie $\|\varphi\|$.

c) Wir versehen den Vektorraum $c_0 \times \mathbb{K}$ mit der durch

$$\|((x_n)_n, \lambda)\| := \|(x_n)_n\|_\infty + |\lambda| \qquad \text{für } ((x_n)_n, \lambda) \in c_0 \times \mathbb{K}$$

gegebenen Norm. Dann ist $(c_0 \times \mathbb{K}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Beweisen Sie, dass

$$T : (c_0 \times \mathbb{K}, \|\cdot\|) \to (c, \|\cdot\|_\infty);\ ((x_n)_n, \lambda) \mapsto (x_n + \lambda)_n$$

ein wohldefinierter stetiger Isomorphismus mit stetiger Umkehrabbildung ist.

***Lösungsvorschlag*:**

zu a): Der normierte Raum $(c, \|\cdot\|_\infty)$ kein Innenproduktraum.
Um das einzusehen, betrachten wir die Folgen $x := (1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ und $y := (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$, die offenkundig beide zu $c_0 \subseteq c$ gehören. Wäre $(c, \|\cdot\|_\infty)$ ein Innenprodutkraum, so würde in $(c, \|\cdot\|_\infty)$ insbesondere die Parallelogrammgleichung gelten. Wir haben jedoch einerseits

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = \|(1, 1, 0, 0, 0, \ldots)\|_\infty^2 + \|(1, -1, 0, 0, 0, \ldots)\|_\infty^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

und andererseits

$$2 \cdot (\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) = 2 \cdot (\|(1, 0, 0, 0, 0, \ldots)\|_\infty^2 + \|(0, 1, 0, 0, 0, \ldots)\|_\infty^2) = 2 \cdot (1^2 + 1^2) = 4,$$

sodass in $(c, \|\cdot\|_\infty)$ die Parallelogrammgleichung verletzt ist. Daher ist $(c, \|\cdot\|_\infty)$ in der Tat kein Innenproduktraum.

zu b): Die Linearität von φ folgt aus den bekannten elementaren Grenzwertrechenregeln. Sei nun $(x_n)_n \in c$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $|x_m| \leq \|(x_n)_n\|_\infty$, woraus durch Grenzübergang $m \to \infty$ die Abschätzung $|\varphi((x_n)_n)| = |\lim_{m\to\infty} x_m| = \lim_{m\to\infty} |x_m| \leq \|(x_n)_n\|_\infty$ folgt. Daher ist φ stetig mit $\|\varphi\| \leq 1$. Wir betrachten nun $\mathbb{1} := (1,1,1,1,\ldots) \in c$. Dann gilt $\varphi(\mathbb{1}) = 1$ sowie $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$, sodass $\|\varphi\| \geq |\varphi(\mathbb{1})| = 1$ folgt. Insgesamt liefert dies $\|\varphi\| = 1$.

zu c): Für $(x_n)_n \in c_0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lim_{n\to\infty}(x_n + \lambda) = \lambda$, weshalb T in der Tat nach c abbildet. Man rechnet zudem leicht nach, dass T linear ist: Für $(x_n)_n, (y_n)_n \in c_0$, $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} T\Big(\alpha((x_n)_n, \lambda) + ((y_n)_n, \mu)\Big) &= T\Big(((\alpha x_n + y_n)_n, \lambda + \mu)\Big) = (\alpha x_n + y_n + \lambda + \mu)_n \\ &= \alpha(x_n + \lambda)_n + (y_n + \mu)_n = \alpha T((x_n, \lambda)_n) + T((y_n, \mu)_n). \end{aligned}$$

Wir setzen nun wie zuvor $\mathbb{1} := (1,1,1,1,\ldots)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \|T((x_n)_n, \lambda)\|_\infty &= \|(x_n + \lambda)_n\|_\infty = \|(x_n)_n + \lambda\mathbb{1}\|_\infty \\ &\leq \|(x_n)_n\|_\infty + |\lambda| \cdot \|\mathbb{1}\|_\infty = \|(x_n)_n\|_\infty + |\lambda| = \|((x_n)_n, \lambda)\| \end{aligned}$$

für alle $((x_n)_n, \lambda) \in c_0 \times \mathbb{K}$. Folglich ist T stetig (mit $\|T\| \leq 1$).
Es sei φ wie in Teil b). Wir betrachten die Abbildung

$$S : c \to c_0 \times \mathbb{K};\ (y_n)_n \mapsto ((y_n - \varphi((y_m)_m))_n, \varphi((y_n)_n)).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(y_n - \varphi((y_m)_m)) = 0$ ist S wohldefiniert. Ferner ist S wegen der Linearität der Abbildung φ seinerseits linear: Denn es gilt

$$\begin{aligned} S(\alpha(y_n)_n + (z_n)_n)) &= S((\alpha y_n + z_n)_n) = ((\alpha y_n + z_n - \varphi((\alpha y_m + z_m)_m))_n, \varphi((y_n + z_n)_n)) \\ &= \Big((\alpha(y_n - \varphi((y_m)_m)) + z_n - \varphi((z_m)_m))_n, \varphi((y_n)_n) + \varphi((z_n)_n)\Big) \\ &= \alpha\Big((y_n - \varphi((y_m)_m))_n, \varphi((y_n)_n)\Big) + \Big((z_n - \varphi((z_m)_m))_n, \varphi((z_n)_n)\Big) \\ &= \alpha S((y_n)_n) + S((z_n)_n)) \end{aligned}$$

für alle $(y_n)_n, (z_n)_n \in c$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$. Darüber hinaus erhalten wir mit dem Ergebnis aus

Teil b)

$$\begin{aligned}\|S((y_n)_n)\| &= \|(y_n - \varphi((y_m)_m))_n\|_\infty + |\varphi((y_n)_n)| \\ &\le \|(y_n)_n\|_\infty + |\varphi((y_m)_m)| \cdot \|\mathbb{1}\|_\infty + \|(y_n)_n)\|_\infty \\ &\le 2\|(y_n)_n\|_\infty + \|(y_n)_n\|_\infty = 3\|(y_n)_n\|_\infty\end{aligned}$$

für alle $(y_n)_n \in c$. Mithin ist S stetig (mit $\|S\| \le 3$).
Es gilt nun einerseits

$$\begin{aligned}ST((x_n)_n, \lambda) = S((x_n + \lambda)_n) &= ((x_n + \lambda - \varphi((x_m + \lambda)_m))_n, \varphi((x_n + \lambda)_n)) \\ &= ((x_n + \lambda - \lambda)_n, \lambda)) = ((x_n)_n, \lambda)\end{aligned}$$

für alle $((x_n)_n, \lambda) \in c_0 \times \mathbb{K}$ sowie andererseits

$$TS((y_n)_n) = T((y_n - \varphi((y_m)_m))_n, \varphi((y_n)_n)) = (y_n - \varphi((y_m)_m) + \varphi((y_m)_m))_n = (y_n)_n$$

für alle $(y_n)_n \in c$. Daher ist T tatsächlich ein Isomorphismus mit stetiger Umkehrabbildung $T^{-1} = S$. □

Bemerkungen:

a) Das Ergebnis aus Teil b) liefert sofort, dass $c_0 = \mathrm{N}(\varphi)$ ein abgeschlossener Unterraum von c ist.

b) Man zeigt leicht, dass durch

$$(c_0 \times \mathbb{K}, \|\cdot\|) \to (c_0, \|\cdot\|_\infty);\ \ ((x_n)_n, \lambda) \mapsto (\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

ebenfalls ein stetiger Isomorphismus mit stetiger Umkehrabbildung gegeben ist. Zusammen mit dem Ergebnis aus Teil c) liefert dies nun

$$c_0 \cong c_0 \times \mathbb{K} \cong c$$

und damit auch

$$c \cong c_0 \times \mathbb{K} \cong c \times \mathbb{K},$$

wobei $X \cong Y$ für normierte Räume X und Y hier bedeutet, dass ein stetiger Isomorphismus $X \to Y$ mit stetiger Umkehrabbildung existiert. Aus topologischer Sicht können also c und c_0 nicht voneinander unterschieden werden.

Die Isomorphismen $c_0 \cong c_0 \times \mathbb{K}$ und $c \cong c \times \mathbb{K}$ scheinen auf den ersten Blick nicht besonders überraschend zu sein, sind doch $V \times K$ und V stets im algebraischen Sinne isomorph, sofern nur V ein unendlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K ist. Wenn es jedoch um topologische Isomorphismen (also stetige Isomorphismen mit stetiger Umkehrabbildung) geht, ist keineswegs mehr klar, ob stets $X \times \mathbb{K} \cong X$ für einen Banachraum X gilt. Schon Banach selbst stellte diese Frage, die jedoch erst 1994 durch den Fieldsmedaillenpreisträger W. T. Gowers *negativ* beantwortet wurde.

Aufgabe 6

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum, $U \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum und $\varphi : U \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional (wobei natürlich U mit der Restriktion der auf $\mathcal{H}$ definierten Norm versehen ist). Zeigen Sie, dass ein $\psi \in \mathcal{H}'$ mit $\psi|_U = \varphi$ und mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$ existiert.

***1. Lösungsvorschlag*:**

Es bezeichne P_U die orthogonale Projektion auf U längs $U^\perp$. Wir setzen nun $\psi := \varphi \circ P_U$. Wegen $\varphi \in U' = \mathfrak{B}(U, \mathbb{K})$ und $P_U \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, U)$ gilt $\psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathbb{K}) = H'$. Es gilt

$$\psi(u) = \varphi(P_U(u)) = \varphi(u)$$

für alle $u \in U$, d.h., wir haben $\psi|_U = \varphi$. Nach Aufgabe 37 b) (ii) gilt $\|P_U\| \leq 1$. Daher folgt einerseits

$$\|\psi\| \leq \|\varphi\| \cdot \|P_U\| \leq \|\varphi\|$$

und andererseits

$$\|\psi\| \geq \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |\psi(u)| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\| \leq 1}} |\varphi(u)| = \|\varphi\|,$$

sodass wir insgesamt $\|\psi\| = \|\varphi\|$ erhalten.

***2. Lösungsvorschlag*:**

Als abgeschlossener Unterraum eines vollständigen normierten Raumes, ist U seinerseits (versehen mit der Restriktion der auf $\mathcal{H}$ definierten Norm) ein Banachraum. Es ist unmittelbar klar, dass $(\cdot|\cdot)|_{U \times U}$ ein Innenprodukt auf U ist, welches die Norm von U induziert. Daher ist U ein Hilbertraum. Folglich existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz ein $u \in U$ mit $\varphi(v) = (v|u)$ für alle $v \in U$. Es gilt dann auch $\|\varphi\| = \|u\|$. Wir setzen nun $\psi(x) := (x|u)$ für $x \in \mathcal{H}$. Bekanntlich wird hierdurch ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ erklärt mit $\|\psi\| = \|u\|$. Damit gilt insbesondere $\|\psi\| = \|\varphi\|$ und offenkundig hat man auch $\psi|_U = \varphi$. $\square$

***Bemerkung*:**

a) Die normgleiche Fortsetzung ψ ist sogar eindeutig. Sei nämlich $\chi \in \mathcal{H}'$ beliebig mit $\chi|_U = \varphi$ und mit $\|\chi\| = \|\varphi\|$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein $y \in \mathcal{H}$ mit $\chi(x) = (x|y)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Es gilt dann auch $\|y\| = \|\chi\| = \|\varphi\| = \|u\|$, wobei u

wie im zweiten Lösungsvorschlag sei. Wir wollen nun $y = u$ nachweisen, woraus alsdann $\chi = \psi$ und damit die Eindeutigkeit folgt.

Einerseits gilt $\|u + y\| \leq \|u\| + \|y\| = 2\|u\|$. Andererseits hat man

$$\|u + y\| = \|(\,\cdot\,|u + y)\| \geq \sup_{\substack{v \in U \\ \|v\| \leq 1}} |(v|u + y)| = \sup_{\substack{v \in U \\ \|v\| \leq 1}} |(v|u) + (v|y)| = \sup_{\substack{v \in U \\ \|v\| \leq 1}} |\varphi(v) + \chi(v)|$$

$$= 2 \cdot \sup_{\substack{v \in U \\ \|v\| \leq 1}} |\varphi(v)| = 2\|\varphi\| = 2\|u\|,$$

sodass wir insgesamt $\|u + y\| = 2\|u\|$ erhalten. Mit der Parallelogrammgleichung folgt nun

$$\|u - y\|^2 = 2 \cdot (\|u\|^2 + \|y\|^2) - \|u + y\|^2 = 2 \cdot (\|u\|^2 + \|u\|^2) - (2 \cdot \|u\|)^2 = 0$$

und hieraus $u = y$.

Der tiefer liegende Grund für die Eindeutigkeit von ψ ist jedoch, wie die Funktionalanalysis lehrt, eine spezifische geometrische Eigenschaft des Dualraumes $\mathcal{H}'$, welche man als *strikte Konvexität* bezeichnet.

Lässt man hingegen die Bedingung der Normgleichheit fallen, so ist die Fortsetzung i. Allg. nicht mehr eindeutig. Ist nämlich $U \neq \mathcal{H}$, so ist $U^\perp \neq \{0\}$ und daher ist dann $\left(U^\perp\right)'$ mindestens eindimensional; insbesondere existieren $\chi_1, \chi_2 \in \left(U^\perp\right)'$ mit $\chi_1 \neq \chi_2$. Dann ist $\psi_j := \varphi P_U + \chi_j P_{U^\perp} \in \mathcal{H}'$ $(j \in \{1, 2\})$ sowohl eine Fortsetzung von φ als auch von χ_j, sodass insbesondere $\psi_1 \neq \psi_2$ gilt.

b) Die in der Aufgabe zu beweisende Aussage bleibt richtig, auch wenn man auf die Abgeschlossenheit des Untervektorraumes U verzichtet, da man leicht zeigen kann, dass sich in diesem Falle φ auf eindeutige Weise zu einer stetigen Linearform auf $\overline{U}$ fortsetzen lässt.

Außerdem kann man auch darauf verzichten einen Hilbertraum zu betrachten und stattdessen einen beliebigen normierten Raum zulassen. Diese Aussage ist jedoch ungleich tiefer als die hier bewiesene und als *Satz von Hahn-Banach* bekannt und stellt einen der Grundpfeiler der Funktionalanalysis dar.

$\square$

Aufgabe 7

Es sei $\Omega := (0,1)$. Wir betrachten die nachstehenden Funktionen:

a) $f : (0,1) \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{sonst}, \end{cases}$

b) $g : (0,1) \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{1}{x}$,

c) $h : (0,1) \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^{\frac{-1}{4}}$.

Bestimmen Sie unter diesen Funktionen all jene Funktionen, die zu $H^1(\Omega)$ gehören, und geben Sie für diese Funktionen jeweils die schwache Ableitung an.

***Lösungsvorschlag*:**

zu a): Es gilt $f(x) = 1$ für Lebesgue-fast alle $x \in (0,1)$. Da die Funktion, welche auf $(0,1)$ konstant gleich 1 ist, eine quadratintegrable C^1-Funktion mit quadratintegrabler klassischer erster Ableitung 0 ist, folgt nach Aufgabe 43 auf Blatt 11, dass $f \in H^1(\Omega)$ mit $f' = 0$ gilt.
Man kann dies auch direkt ohne Aufgabe 43 einsehen: Es sei $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ beliebig und $0 < a < b < 1$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [a,b]$. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(b) - \varphi(a) = 0 - 0 = 0 = -\int_\Omega 0 \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Damit folgt nach Definition $f \in H^1(\Omega)$ mit $f' = 0$.

zu b): Wegen $g \notin L^2(\Omega)$ gilt erst recht $g \notin H^1(\Omega)$.

zu c): Wir zeigen $h \notin H^1(\Omega)$ mit Hilfe eines Widerspruchbeweises und nehmen zu diesem Zwecke $h \in H^1(\Omega)$ an und bezeichnen mit ∂h die schwache Ableitung von h. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ setzen wir $\Omega_n := (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$. Wegen $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega_n) \subseteq \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ gilt dann auch, wie man unmittelbar einsieht, $h|_{\Omega_n} \in H^1(\Omega_n)$ und die schwache Ableitung von $h|_{\Omega_n}$ ist gerade $(\partial h)|_{\Omega_n}$. Da h eine stetig differenzierbare Funktion ist und $h'|_{\Omega_n} \in L^2(\Omega_n)$ gilt, wobei h' die klassische erste Ableitung von h bezeichnet, liefert Aufgabe 43 auf Blatt 11, dass $h'|_{\Omega_n} = (\partial h)|_{\Omega_n}$ Lebesgue-fast überall auf Ω_n gilt. Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst wieder eine Nullmenge ist, erhalten wir $h' = \partial h$ Lebesgue-fast überall auf $\bigcup_{n=3}^\infty \Omega_n = \Omega$. Insbesondere gilt $h' \in L^2(\Omega)$. Allerdings hat man $h'(x) = \frac{-1}{4} \cdot x^{\frac{-5}{4}}$ und somit auch $(h'(x))^2 = \frac{1}{16} \cdot x^{\frac{-5}{2}}$ für $x \in (0,1)$, woraus $h' \notin L^2(\Omega)$ folgt. Widerspruch!
Also war unsere Annahme falsch und es folgt $h \notin H^1(\Omega)$. $\square$

Aufgabe 8

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum und $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ kompakt und symmetrisch mit $T^2 = T$. Zeigen Sie, dass $T(\mathcal{H})$ endlichdimensional ist.

***1. Lösungsvorschlag*:**

Nach dem Spektralsatz für kompakte symmetrische Operatoren (und wegen der Separabilität des unendlichdimensionalen Raumes $\mathcal{H}$) existiert eine Orthonormalbasis $\{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}$ und eine reelle Nullfolge $(\lambda_n)_n$ derart, dass

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|u_n) u_n$$

für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} T^2 x &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (Tx|u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x|u_k) u_k \middle| u_n \right) u_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x|u_k)(u_k|u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (x|u_n) u_n \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{H}$. Hieraus ergibt sich

$$\lambda_n u_n = T u_n = T^2 u_n = \lambda_n^2 u_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, was wiederum $\lambda_n = \lambda_n^2$ bzw. $\lambda_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach sich zieht. Da $(\lambda_n)_n$ eine Nullfolge ist, folgt nun, dass die Folge $(\lambda_n)_n$ schließlich konstant 0 wird, d.h., es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\lambda_n = 0$ für alle $n > n_0$ gilt. Dies impliziert

$$Tx = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n (x|u_n) u_n \in \mathrm{LH}\{u_1, \dots, u_{n_0}\}$$

für alle $x \in \mathcal{H}$, woraus $T(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{LH}\{u_1, \dots, u_{n_0}\}$ und damit auch $\dim T(\mathcal{H}) < \infty$ folgt.

***2. Lösungsvorschlag*:**

Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $(I - T)(Tx) = Tx - T^2 x = Tx - Tx = 0$. Dies impliziert $T(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{N}(I - T)$. Da T kompakt ist, gilt etwa nach Satz 13.1 der Vorlesung die Ungleichung $\dim \mathrm{N}(I - T) < \infty$ und daher a fortiori $\dim T(\mathcal{H}) < \infty$. □

Bemerkung: Man beachte, dass wir im zweiten Lösungsvorschlag weder die Selbstadjungiertheit von T noch die Tatsache, dass $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum ist, ausgenutzt haben. Tatsächlich zeigt dieser Beweis also viel mehr: Ist X ein Banachraum und $T \in \mathfrak{B}(X)$ kompakt mit $T^2 = T$, so folgt schon $\dim T(\mathcal{H}) < \infty$; oder anders ausgedrückt: Die einzigen kompakten Projektionen in Banachräumen sind die Projektionen auf endlichdimensionale Unterräume.

Man kann diese Aussage sogar noch ein klein wenig verallgemeinern:

Ist X ein Banachraum, $T \in \mathfrak{B}(X)$ ein kompakter Operator, $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und existiert ein Polynom $f(Z) = \sum_{j=m}^{n} a_j Z^j \in \mathbb{K}[Z]$ mit $f(T) = 0$ (wobei $T^0 := I$) und mit $a_n \neq 0 \neq a_m$, so gilt $\dim T^m(X) < \infty$.

Beweis: Es gilt

$$\left(a_m - \sum_{j=m+1}^{n} (-a_j) T^{j-m} \right) T^m = f(T) = 0$$

und somit $T^m(X) \subseteq \mathrm{N}(a_m - \sum_{j=m+1}^{n} (-a_j) T^{j-m})$. Da mit T auch $\sum_{j=m+1}^{n} (-a_j) T^{j-m}$ kompakt ist und da $a_m \neq 0$ gilt, haben wir $\dim \mathrm{N}(a_m - \sum_{j=m+1}^{n} (-a_j) T^{j-m}) < \infty$ und daher ebenso $\dim T^m(X) < \infty$. $\square$