KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE SS 2013
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

Differentialgleichungen und Hilberträume

Lösungsvorschlag zur Übungsklausur

1. Teil: Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Überführen Sie die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x''(t) + x(t) - \frac{2x(t)}{\sqrt{1 + x^2(t)}} = 0$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung und bestimmen Sie ein nichtkonstantes erstes Integral für dieses System.

(*Hinweis: Versuchen Sie einen Ansatz der Form* $\lambda(x, y) = \mu(x)\nu(y)$ *mit (von der Nullfunktion verschiedenen) reellwertigen* C^1*-Funktionen* μ, ν*.*)

***Lösungsvorschlag*:**

Zunächst einmal erhalten wir mit $y(t) := x'(t)$ das System

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = g(x(t), y(t)), \\ y'(t) = h(x(t), y(t)), \end{cases}$$

mit $g(x, y) := y$ und $h(x, y) := \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - x$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$. Um nun ein nichtkonstantes erstes Integral zu finden, versuchen wir dem Hinweis folgend von der Nullfunktion verschiedene reellwertige C^1-Funktionen μ, ν derart zu finden, dass die Integrabilitätsbedingung $-(\lambda h)_y = (\lambda g)_x$ mit $\lambda(x, y) = \mu(x)\nu(y)$ erfüllt ist, um anschließend ein erstes Integral H aus der Forderung

$$H'(x, y) = \nabla H(x, y)^T = \lambda(x, y)(-h(x, y), g(x, y))$$

zu bestimmen. Es gilt

$$-\frac{\partial(\lambda h)}{\partial y}(x,y) = \mu(x)\nu'(y)\left(x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

sowie

$$\frac{\partial(\lambda g)}{\partial x}(x,y) = \mu'(x)\nu(y)y.$$

Zum Auffinden solcher μ und ν bietet sich also der Ansatz an, eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} \mu'(x) = \left(x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mu(x), \\ \nu'(y) = y\nu(y), \end{cases}$$

mit $\mu \neq 0 \neq \nu$ zu suchen. Eine solche ist z.B. durch

$$\begin{cases} \mu(x) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{1+x^2}\right), \\ \nu(y) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}, \end{cases}$$

gegeben. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}\right) &= \left(x - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\exp\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2} \\ &= -h(x,y)\mu(x)\nu(y) \end{aligned}$$

machen wir nun den Ansatz

$$H(x,y) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2} + c(y)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c. Die Forderung $\frac{\partial H}{\partial y} = \lambda g$ führt dann zu

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{1+x^2}\right)y\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2} + c'(y) = y\exp\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}$$

oder äquivalent $c'(y) = 0$. Somit ist c konstant und ein nichtkonstantes erstes Integral des Systems (1) ist folglich durch

$$H(x,y) = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y^2}$$

gegeben. $\square$

Aufgabe 2

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x'(t) = 2(x(t) + y(t) - x(t)y(t) - x^2(t)), \\ y'(t) = -2z(t) - y(t) - x(t)y(t), \\ z'(t) = x(t) - z(t). \end{cases}$$

Verifizieren Sie, dass $(0,0,0)$ ein Equilibrium ist und untersuchen Sie $(0,0,0)$ im Hinblick auf seine Stabilitätseigenschaften.

***Lösungsvorschlag*:**

Wir setzen

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2(x + y - xy - x^2) \\ -2z - y - xy \\ x - z \end{pmatrix}$$

für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2(0 + 0 - 0 \cdot 0 - 0^2) \\ -2 \cdot 0 - 0 - 0 \cdot 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $(0,0,0)$ ist als Equilibrium erkannt. Ferner gilt

$$f'(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2(1 - y - 2x) & 2(1 - x) & 0 \\ -y & -1 - x & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$f'(0,0,0) := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom χ der Matrix $f'(0,0,0)$ lautet (Regel von Sarrus)

$$\chi(t) = (2 - t)(-1 - t)^2 - 4 = (2 - t)(t^2 + 2t + 1) - 4 = -t^3 + 3t - 2.$$

Insbesondere gilt $\chi(1) = 0$. Folglich besitzt $f'(0,0,0)$ wenigstens einen Eigenwert mit strikt positivem Realteil. Mithin ist $(0,0,0)$ instabil. $\square$

Aufgabe 3

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y^2(t), \\ y'(t) = -x(t)y(t) - y^3(t). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Equilibria und weisen Sie nach, dass diese allesamt asymptotisch stabil sind.

(*Hinweis: Betrachten Sie* $V(x,y) = ax^2 + by^2$ *für geeignete* $a, b \in \mathbb{R}$.)

***Lösungsvorschlag*:**

Wir setzen

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} -x + y^2 \\ -xy - y^3 \end{pmatrix}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und erhalten

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x = y^2 \\ -y^2y - y^3 = 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x = y^2 \\ y^3 = 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (0,0).$$

Somit ist $(0,0)$ die einzige stationäre Stelle. Um nachzuweisen, dass $(0,0)$ asymptotisch stabil ist, wollen wir den Stabilitätssatz von Lyapunov zur Anwendung bringen und machen dem Hinweis folgend einen Ansatz der Form $V(x,y) = ax^2 + by^2$ für eine Lyapunov-Funktion. Dann ist V natürlich stetig differenzierbar mit

$$V'(x,y) = \nabla V(x,y)^T = (2ax, 2by)$$

und es gilt

$$(V'(x,y)|f(x,y)) = -2ax^2 + 2axy^2 - 2bxy^2 - 2by^4,$$

wobei $(\cdot|\cdot)$ das übliche Innenprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Mit der Wahl $a = b = 1$ liefert dies

$$(V'(x,y)|f(x,y)) = -2x^2 - 2y^4 \leq 0,$$

wobei die Ungleichung strikt ist, falls $(x,y) \neq (0,0)$ gilt. Ferner haben wir dann $V(0,0) = 0$ und $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Also ist $V(x,y) = x^2 + y^2$ eine Lyapunov-Funktion für f und $(0,0)$ mit $(V'(x,y)|f(x,y)) < 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Folglich ist $(0,0)$ asymptotisch stabil. $\square$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie das folgende (nichtlineare) Dirichlet-Randwertproblem hinsichtlich seiner Lösbarkeit.

$$\begin{cases} u''(t) = \left(1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tu(t)}\right)\right)^{-1}, \quad 1 \le t \le 2, \\ u(1) = u(2) = 0. \end{cases}$$

***Lösungsvorschlag*:**

Wir zeigen, dass das gegebene Dirichlet-Randwertproblem eindeutig lösbar ist, indem wir die Voraussetzungen aus dem Satz von Lettenmeyer verifizieren. Hierzu setzen wir

$$f(t,x) := \left(1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)\right)^{-1}$$

für $(t,x) \in [1,2] \times \mathbb{R}$; hiermit nimmt dann das gegebene Dirichlet-Randwertproblem die Form

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t)), \quad 1 \le t \le 2, \\ u(1) = u(2) = 0. \end{cases}$$

an. Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) &= -\left(1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)\right)^{-2} \exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)\mathrm{e}^{-tx}(-t) \\ &= \frac{\exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)}{1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)} \cdot t. \end{aligned}$$

Es gilt

$$0 \le \frac{\exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)}{1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)} \le 1$$

und wegen $\mathrm{e}^y > y$ $(y \in \mathbb{R})$ gilt auch

$$0 \le \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)} \le \frac{\exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)}{1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tx}\right)} \le 1,$$

so dass wir schließlich

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \le 2$$

für alle $(t,x) \in [1,2] \times \mathbb{R}$ erhalten. Der Mittelwertsatzes der Differentialrechnung impliziert nun für alle $t \in [1,2]$ und $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}$ (mit $x \neq \widetilde{x}$) die Existenz einer rellen Zahl $\xi = \xi(t,x,x_0)$ zwischen x und $\widetilde{x}$ mit $f(t,x) - f(t,\widetilde{x}) = (x - \widetilde{x})\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)$, was

$$|f(t,x) - f(t,\widetilde{x})| = |x - \widetilde{x}| \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi)\right| \le 2|x - \widetilde{x}|.$$

nach sich zieht. Die Funktion f ist also bzgl. der zweiten Variablen Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante 2. Wegen

$$\frac{\pi^2}{(2-1)^2} = \pi^2 > 2$$

können wir daher den Satz von Lettenmeyer anwenden. $\square$

2. Teil: Hilberträume

Aufgabe 5

Es seien $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Innenproduktraum, $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

a) Es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathcal{H}$.

b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ sowie $\lim_{n\to\infty}(x_n|y) = (x|y)$ für alle $y \in \mathcal{H}$.

***Lösungsvorschlag*:**

Die Implikation "a) $\Longrightarrow$ b)" folgt sofort aus der Stetigkeit der Norm und der Stetigkeit der linearen Funtionale $(\cdot|y)$ $(y \in \mathcal{H})$.
Wir setzen nun voraus, dass b) erfüllt sei. Dann folgt aus

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x|x_n - x) = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x_n|x) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

durch Grenzübergang $n \to \infty$ die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|x) = 0$$

und somit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Aufgabe 6

Sei $X = \ell^p$ für $1 \leq p < \infty$ und $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T_\pi : \ell^p \to \ell^p; (x_n)_n \mapsto (x_{\pi(n)})_n$$

ein wohldefinierter stetiger linearer Operator ist, und bestimmen Sie $\|T_\pi\|$.

b) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Der Operator T_π ist isometrisch.

(ii) Der Operator T_π ist injektiv.

(iii) Die Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv.

(iv) Der Operator T_π ist ein Isomorphismus.

(*Hinweis: Zeigen Sie die Implikationskette (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(ii) sowie die Implikation (iii)⇒(i).*)

***Lösungsvorschlag*:**

zu a): Nach dem Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{\pi(n)}|^p = \sum_{\substack{m=1 \\ m \in \pi(\mathbb{N})}}^{\infty} |x_m|^p \leq \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p < \infty \tag{2}$$

für alle $(x_n)_n \in \ell^p$ (wobei wir bei der vorletzten Abschätzung die Injektivität von π benutzt haben) und damit die Wohldefiniertheit des Operator T_π (d.h., T_π bildet tatsächlich nach ℓ^p ab). Die Linearität rechnet man leicht nach und die Ungleichungskette (2) liefert zudem $\|T_\pi(x_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_p$ für alle $(x_n)_n \in \ell^p$ und somit die Stetigkeit von T_π sowie die Abschätzung $\|T_\pi\| \leq 1$. Mit $e_k := (\delta_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ (wobei $k \in \mathbb{N}$ und $\delta_{k,n}$ das Kroneckerdelta ist) ergibt sich (unter erneutem Ausnutzen der Injektivität von π) $T_\pi e_{\pi(1)} = (\delta_{\pi(1),\pi(n)})_n = e_1$, was wegen $\|e_1\|_p = 1 = \|e_{\pi(1)}\|_p$ schließlich $\|T_\pi\| = 1$ liefert.

zu b): Die Implikationen "(i)⇒(ii)" und "(iv)⇒(ii)" sind immer gültig.
Die Implikation "(iii)⇒(iv)" folgt so: Ist π bijektiv mit Umkehrabbildung σ, so ist T_σ nach Teil a) ein stetiger linearer Operator. Für alle $(x_n)_n \in \ell^p$ gilt dann mit $(y_n)_n := (x_{\pi(n)})_n$:

$$T_\sigma T_\pi(x_n)_n = T_\sigma(x_{\pi(n)})_n = T_\sigma(y_n)_n = (y_{\sigma(n)})_n = (x_{\pi(\sigma(n))})_n = (x_n)_n;$$

es gilt also $T_\sigma T_\pi = I_{\ell^p}$. Vertauschen der Rollen von σ und π liefert auch $T_\pi T_\sigma = I_{\ell^p}$, womit T_π als Isomorphismus erkannt ist.

Die Implikation "(iii)⇒(i)" erhält man folgerndermaßen: Ist π bijektiv, so folgt wiederum mit dem Umordnungsatz für absolut konvergente Reihen

$$\|T_\pi(x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{\pi(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m\in\pi(\mathbb{N})}}^{\infty} |x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n)_n\|_p$$

für alle $(x_n)_n \in \ell^p$, was präzise zeigt, dass T_π isometrisch ist.

Um schließlich "(ii)⇒(iii)" nachzuweisen, bemühen wir einen Widerspruchsbeweis und machen die Annahme, dass zwar (ii) erfüllt sei, nicht jedoch (iii). Da π nach Voraussetzung injektiv ist, kann π dann nicht surjektiv sein. Wir wählen ein $m \in \mathbb{N}\setminus\pi(\mathbb{N})$. Dann folgt $T_\pi e_m = (\delta_{m,\pi(n)})_n = 0$ im Widerspruch zur Injektivität von T_π. $\square$

Aufgabe 7

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum, $U \in \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum, P_U die orthogonale Projektion auf U (längs $U^\perp$) und $x \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass für ein $y \in \mathcal{H}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) Es gilt $P_U x = y$.

b) Man hat $y \in U$, $y \perp x - y$ sowie $\|y\| = \|P_U x\|$.

***Lösungsvorschlag*:**

Wegen $P_U(\mathcal{H}) = U$ und $(I - P_U)(\mathcal{H}) = \mathrm{N}(P_U) \perp P_U(\mathcal{H})$, was ja $(P_U x | x - P_U x) = 0$ nach sich zieht, ist die Implikation "a)$\Longrightarrow$b)" klar.
Sei nun $y \in U$ mit $y \perp x - y$ und $\|y\| = \|P_U x\|$. Dann folgt

$$\|P_U x - y\|^2 = \|P_U x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(P_U x|y) = 2\|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(P_U x - (x - y)|y),$$

woraus wegen (beachte $y \in U = P_U(\mathcal{H}) \perp (I - P_U)(\mathcal{H})$)

$$(P_U x - x + y|y) = -((I - P_U)x|y) + \|y\|^2 = \|y\|^2$$

schließlich $\|P_U x - y\|^2 = 0$, also $P_U x = y$ folgt. $\square$

Aufgabe 8

Es sei $m \in L^\infty([0,1],\mathbb{R})$ mit $\lambda_1(m^{-1}(\{z\})) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei λ_1 das eindimensionale Lebesguemaß auf $[0,1]$ bezeichne. Beweisen Sie, dass der Operator

$$T : L^2([0,1],\mathbb{C}) \to L^2([0,1],\mathbb{C});\; f \mapsto mf$$

nicht kompakt ist.

***Lösungsvorschlag*:**

Da m reellwertig ist, erhalten wir

$$(Tf|g) = \int_0^1 m(x)f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\overline{m(x)g(x)}\,\mathrm{d}x = (f|Tg)$$

für alle $f, g \in L^2([0,1],\mathbb{C})$. Der Operator T ist also symmetrisch.
Wir machen nun die Annahme, T sei kompakt. Aus der Vorlesung wissen wir, dass T dann wenigstens einen (reellen) Eigenwert μ besitzt. Es gibt also ein $f \in L^2([0,1],\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ mit $(\mu - T)f = 0$, also mit $(\mu - m)f = 0$ Lebesgue-fast überall auf $[0,1]$. Dies impliziert $m(x) = \mu$ für Lebesgue-fast alle $x \in f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Daher erhalten wir den Widerspruch

$$0 = \lambda_1(m^{-1}(\{\mu\})) \geq \lambda_1(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) > 0,$$

wobei die letzte Ungleichung daraus folgt, dass f keine Lebesgue-Nullfunktion ist. $\square$