KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE SS 2013
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Heiko Hoffmann

**Differentialgleichungen und Hilberträume**

**Übungsklausur**

# 1. Teil: Differentialgleichungen

## Aufgabe 1

Überführen Sie die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x''(t) + x(t) - \frac{2x(t)}{\sqrt{1 + x^2(t)}} = 0$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung und bestimmen Sie ein nichtkonstantes erstes Integral für dieses System.

(*Hinweis: Versuchen Sie einen Ansatz der Form* $\lambda(x, y) = \mu(x)\nu(y)$ *mit (von der Nullfunktion verschiedenen) reellwertigen* $\mathrm{C}^1$*-Funktionen* $\mu, \nu$*.*)

## Aufgabe 2

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x'(t) = 2(x(t) + y(t) - x(t)y(t) - x^2(t)), \\ y'(t) = -2z(t) - y(t) - x(t)y(t), \\ z'(t) = x(t) - z(t). \end{cases}$$

Verifizieren Sie, dass $(0, 0, 0)$ ein Equilibrium ist und untersuchen Sie $(0, 0, 0)$ im Hinblick auf seine Stabilitätseigenschaften.

### Aufgabe 3

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y^2(t), \\ y'(t) = -x(t)y(t) - y^3(t). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Equilibria und weisen Sie nach, dass diese allesamt asymptotisch stabil sind.

(*Hinweis: Betrachten Sie* $V(x, y) = ax^2 + by^2$ *für geeignete* $a, b \in \mathbb{R}$.)

### Aufgabe 4

Untersuchen Sie das folgende (nichtlineare) Dirichlet-Randwertproblem hinsichtlich seiner Lösbarkeit.

$$\begin{cases} u''(t) = \left(1 + \exp\left(\mathrm{e}^{-tu(t)}\right)\right)^{-1}, \quad 1 \leq t \leq 2, \\ u(1) = u(2) = 0. \end{cases}$$

## 2. Teil: Hilberträume

### Aufgabe 5

Es seien $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Innenproduktraum, $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

**a)** Es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathcal{H}$.

**b)** Es gilt $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ sowie $\lim_{n\to\infty}(x_n|y) = (x|y)$ für alle $y \in \mathcal{H}$.

### Aufgabe 6

Sei $X = \ell^p$ für $1 \leq p < \infty$ und $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv.

**a)** Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T_\pi : \ell^p \to \ell^p; (x_n)_n \mapsto (x_{\pi(n)})_n$$

ein wohldefinierter stetiger linearer Operator ist, und bestimmen Sie $\|T_\pi\|$.

**b)** Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

**(i)** Der Operator $T_\pi$ ist isometrisch.

**(ii)** Der Operator $T_\pi$ ist injektiv.

**(iii)** Die Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv.

**(iv)** Der Operator $T_\pi$ ist ein Isomorphismus.

(*Hinweis: Zeigen Sie die Implikationskette (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(ii) sowie die Implikation (iii)⇒(i).*)

**Aufgabe 7**

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum, $U \in \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum, $P_U$ die orthogonale Projektion auf $U$ (längs $U^\perp$) und $x \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass für ein $y \in \mathcal{H}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

**a)** Es gilt $P_U x = y$.

**b)** Man hat $y \in U$, $y \perp x - y$ sowie $\|y\| = \|P_U x\|$.

**Aufgabe 8**

Es sei $m \in L^\infty([0,1], \mathbb{R})$ mit $\lambda_1(m^{-1}(\{z\})) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $\lambda_1$ das eindimensionale Lebesguemaß bezeichnet. Beweisen Sie, dass der Operator

$$T_m : L^2([0,1], \mathbb{C}) \to L^2([0,1], \mathbb{C}); \ f \mapsto mf$$

nicht kompakt ist.