Aufgabe 10b

Wir zeigen $|\mu|\|R(i\mu, A)\| \to \infty$ für $|\mu| \to \infty$. Dies impliziert, dass A kein Erzeuger einer analytischen Halbgruppe ist.

Beweis. Es gilt $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + e^{-\lambda} \neq 0\right\} \subset \rho(A)$ und

$$R(\lambda, A)g(t) = Ce^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} g(s) ds$$

für $g \in C([0,1])$, $t \in [0,1]$ und $\lambda \neq -e^{-\lambda}$ mit

$$C = \frac{g(0) - \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} g(s) ds}{\lambda + e^{-\lambda}}.$$

Sei $\lambda := i\mu$ und $g_\mu(t) = e^{-i\mu t}$. Dann ergibt sich für $|\mu| > 1$

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \geq |\mu||R(i\mu, A)g(1)| = |\mu| \left| Ce^{-i\mu} + \int_0^1 e^{-i\mu} ds \right| = |\mu||C+1|$$

und wegen

$$C = \frac{e^{i\mu} - 1}{i\mu e^{i\mu} + 1}$$

folgern wir

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \geq |\mu| \left| \frac{e^{i\mu} + i\mu e^{i\mu}}{i\mu e^{i\mu} + 1} \right| \geq |\mu| \frac{|\mu| - 1}{|\mu| + 1} \to \infty$$

für $|\mu| \to \infty$. □