In der Übung wurde gezeigt, dass die durch $(T(t)f)(s) := f(s+t)$ für $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $s \in \mathbb{R}$ definierte Operatorenfamilie eine C_0-Halbgruppe definiert. Der Erzeuger A ist durch

$$Af = f', \qquad f \in D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}),$$

gegeben und es gilt $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$.

Behauptung: Es gilt $\sigma(A) = i\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\mu \in \mathbb{R}$. Wir wählen $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\|\varphi\|_{L^p} = 1$ und setzen $\varphi_n(t) := n^{-\frac{1}{p}}\varphi(\frac{t}{n})$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\|\varphi_n\|_{L^p} = 1$ und $\|\varphi_n'\|_{L^p} = \frac{1}{n}\|\varphi'\|_{L^p} \to 0$ für $n \to \infty$. Mit $f_n := e^{i\mu\cdot}\varphi_n$ ergibt sich $\|f_n\|_{L^p} = 1$ sowie

$$\|f_n' - i\mu f_n\|_{L^p} = \|e^{i\mu\cdot}\varphi_n'\|_{L^p} = \|\varphi_n'\|_{L^p} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Also ist $i\mu$ ein approximierter Eigenwert und somit $i\mu \in \sigma(A)$. $\square$