In der Übung wurde gezeigt, dass $(M_q(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe ist. Sei A der Erzeuger von $(M_q(t))_{t\geq 0}$ und der Operator B definiert durch

$$Bf = qf, \qquad f \in D(B) := \{f \in C_0(\Omega) : qf \in C_0(\Omega)\}\,.$$

Behauptung: Es gilt $A = B$.

Beweis. Sei $f \in D(A)$. Dann gilt $Af \in C_0(\Omega)$ und für $s \in \Omega$

$$q(s)f(s) = \lim_{t\to 0+} \frac{e^{tq(s)} - 1}{t} f(s) = \lim_{t\to 0+} \frac{M_q(t)f(s) - f(s)}{t} = (Af)\,(s).$$

Also erhalten wir $qf \in C_0(\Omega)$ und damit $f \in D(B)$ sowie $Bf = Af$, d.h. $A \subset B$. Mit Hilfe von $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$ und des Lemmas aus der Übung folgern wir $A = B$. $\square$