Aufgabe 9c

Wir zeigen, dass der Operator A schiefadjungiert ist. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Stone.

Beweis. Seien $(f,g) \in D(A)$ und $(u,v) \in D(A)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle A(f,g),(u,v)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} g'\overline{u}dx + \int_{\mathbb{R}} f'\overline{v}dx = -\int_{\mathbb{R}} g\overline{u'}dx - \int_{\mathbb{R}} f\overline{v'}dx \\ &= -\langle (f,g), A(u,v)\rangle .\end{aligned}$$

Somit ist A schiefsymmetrisch. Umgekehrt gilt für $(f,g) \in D(A)$ und $(u,v) \in D(A^*)$

$$\langle A^*(u,v),(f,g)\rangle = \langle (u,v), A(f,g)\rangle = \langle u, g'\rangle + \langle v, f'\rangle$$

Wählen wir $f = 0$, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}} (A^*(u,v))_2\, \overline{g}dx = \int_{\mathbb{R}} u\overline{g'}dx \qquad \forall g \in H^1(\mathbb{R})$$

und insbesondere: $u \in H^1(\mathbb{R})$ mit $u' = -(A^*(u,v))_2$. Analog ergibt sich $v \in H^1(\mathbb{R})$ mit $v' = -(A^*(u,v))_1$ und schließlich erhalten wir $(u,v) \in D(A)$ und $A^*(u,v) = -A(u,v)$. Also ist A schiefadjungiert. $\square$