zu Aufgabe 25

Im Folgenden stellen wir zwei im Vergleich zur Übung einfachere Beweise für die Richtung $i) \Rightarrow ii)$ von Aufgabe 25c) vor.

Beweis 1. Sei u milde Lösung in X. Wegen $f(s) \in X = D(A_{-1})$ für alle $s \in [0,T]$ ist die Abbildung $t \mapsto T(t-s)f(s) \in X_{-1}$ stetig differenzierbar mit Ableitung $A_{-1}T(t-s)f(s)$. Es folgt, dass auch $g : [0,T] \to X_{-1}$ definiert durch

$$g(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

stetig differenzierbar ist mit

$$g'(t) = f(t) + \int_0^t A_{-1}T(t-s)f(s)ds.$$

Schließlich ist $u \in C^1([0,T], X_{-1})$ mit

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt}T(t)u_0 + g'(t) = A_{-1}\left(T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right) + f(t) \\ &= A_{-1}u(t) + f(t). \end{aligned}$$

Das Vertauschen von A_{-1} mit dem Integral in der letzten Rechnung ist nach einem Satz aus der 0. Übung möglich. □

Beweis 2. Sei u milde Lösung in X. Wegen $u_0 \in X = D(A_{-1})$ und $f \in C([0,T], X) = C([0,T], D(A_{-1}))$ existiert eine klassische Lösung $\tilde{u}$ des Problems in X_{-1}. Nach $ii) \Rightarrow i)$ ist $\tilde{u}$ milde Lösung in X und die Eindeutigkeit der milden Lösung impliziert $u = \tilde{u}$. Also ist u klassische Lösung in X_{-1}. □

Aufgabe 24

zu a) A^α ist dicht definiert, da $R(A^{-\alpha})$ nach Vorlesung dicht in X ist. Außerdem ist A^α per Definition injektiv und somit abschlossen, da die Inverse $A^{-\alpha}$ beschränkt ist. Der Rest der Behauptung folgt unmittelbar.

zu b): Für $\alpha = 0$ folgt die Aussage aus $A^\alpha = Id$. Sei zunächst $\alpha < 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(t)A^\alpha x &= T(t)\left(\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty s^{-\alpha-1}T(s)xds\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty s^{-\alpha-1}T(s)T(t)xds = A^\alpha T(t)x \end{aligned}$$

für alle $x \in X$ und $t \geq 0$. Für $t \geq 0$, $\alpha > 0$ und $x \in D(A^\alpha)$ gilt

$$A^\alpha T(t)x = A^\alpha T(t)A^{-\alpha}A^\alpha x = A^\alpha A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x = T(t)A^\alpha x.$$

zu c): Für $\beta \leq 0$ ist $D(A^\beta) = X$ und die Aussage trivial. Sei deshalb $0 < \beta < \alpha$. Dann gilt $A^{-\beta}A^{\beta-\alpha} = A^{-\alpha}$ und somit

$$D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha}) \subset R(A^{-\beta}) = D(A^\beta).$$

zu d): Der Fall $\alpha, \beta \leq 0$ wurde in der Vorlesung bewiesen. Sei zunächst $\alpha \leq 0$, $\beta > 0$ und $\alpha + \beta > 0$. Dann gilt $A^{-(\alpha+\beta)}A^\alpha = A^{-\beta}$. Wegen $x \in D(A^\beta)$ folgt $x = A^{-(\alpha+\beta)}A^\alpha A^\beta x \in R(A^{-(\alpha+\beta)}) = D(A^{-(\alpha+\beta)})$ und $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$.

Sei $\alpha \leq 0$, $\beta > 0$ und $\alpha + \beta \leq 0$. Wegen $x \in D(A^\beta)$ gilt $A^{(\alpha+\beta)}x = A^{\alpha+\beta}A^{-\beta}A^\beta x = A^\alpha A^\beta x$.

Sei $\alpha > 0$, $\beta \leq 0$ und $\alpha + \beta > 0$. Dann gilt $A^\beta A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}$. Wegen $x \in D(A^{\alpha+\beta})$ folgt $A^\beta x = A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta}x \in R(A^{-\alpha}) = D(A^{-\alpha})$ und $A^\alpha A^\beta x = A^{\alpha+\beta}x$. Die anderen Fälle beweist man analog.