KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

WS 2016/2017
18. Oktober 2016

Evolutionsgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (wesentlicher Definitionsbereich)

Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Ein Teilraum $D \subset D(A)$ heißt *wesentlicher Definitionsbereich* für A, falls D bezüglich der Graphennorm $\|\cdot\|_A$ dicht in $D(A)$ ist. Zeigen Sie:

a) Ist $D \subset D(A)$ mit $\overline{D} = X$ und

$$T(t)D \subset D \qquad \text{für } t > 0,$$

so ist D ein wesentlicher Definitionsbereich für A.

b) Die Menge

$$D_\infty(A) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$$

ist ein wesentlicher Definitionsbereich für A, wobei

$$D(A^n) := \left\{x \in D(A^{n-1})\colon A^{n-1}x \in D(A)\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Für den Beweis der Dichtheit von $D_\infty(A)$ in X ist es hilfreich, die Menge

$$D := \operatorname{span}\left\{x_\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\mathrm{d}s : \quad \varphi \in C_c^\infty(0,\infty), x \in X\right\}$$

zu betrachten.

Aufgabe 2 (Translationshalbgruppe)

Sei $1 \leq p < \infty$. Auf $L^p(\mathbb{R})$ betrachten wir die Operatorenfamilie $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$, die gegeben ist durch $(T(t)f)(s) := f(s+t)$ für $s \in \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine C_0-Gruppe von Isometrien auf $L^p(\mathbb{R})$ ist.
- Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto T(t)$ nicht stetig ist.
- Bestimmen Sie den Erzeuger sowie das Spektrum $\sigma(A)$.