KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Lutz Weis
M.Sc. Fabian Hornung

WS 2016/2017
23. Dezember 2016

Evolutionsgleichungen
10. Übungsblatt

Aufgabe 24 (Eigenschaften von A^α)

Sei X ein Banachraum und $-A$ der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ in X mit

$$\|T(t)\| \leq Me^{-at} \quad \text{für } t \geq 0,$$

wobei $a > 0$ und $M \geq 1$. Zeigen Sie:

a) A^α ist abgeschlossen, dicht definiert, $0 \in \rho(A^\alpha)$ und $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha}$ für $\alpha > 0$;

b) $A^\alpha T(t)x = T(t)A^\alpha x$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ und $x \in D(A^\alpha)$;

c) $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ für $\alpha > \beta$;

d) $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x \in D(A^\beta) \cap D(A^{\alpha+\beta})$;

e) $\|A^\alpha x\| \leq 2(M+1)\|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}$ für alle $\alpha \in [0,1]$ und $x \in D(A)$;

Hinweis zu e): Verwenden Sie die Formel

$$A^{-\beta}x = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-\beta}R(\lambda,-A)x\mathrm{d}\lambda, \qquad x \in X, \quad \beta \in (0,1),$$

aus der Vorlesung und spalten Sie das Integral geeignet auf.

Aufgabe 25 (Extrapolation von C_0-Halbgruppen)

Sei X ein reflexiver Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A und

$$\|T(t)\| \leq Me^{-at} \quad \text{für } t \geq 0,$$

Außerdem definieren wir X_{-1} als die Vervollständigung von $(X, \|\cdot\|_{-1})$, wobei $\|x\|_{-1} := \|A^{-1}x\|$ für $x \in X$. Zeigen Sie:

a) Die C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ kann zu einer C_0-Halbgruppe $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ auf X_{-1} fortgesetzt werden mit $\|T_{-1}(t)\|_{-1} \leq Me^{-at}$ für $t \geq 0$.

Wir bezeichnen den Erzeuger von $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ mit A_{-1} und definieren den Abschluss von A in X_{-1} durch

$$D(\overline{A}) := \{u \in X_{-1} : \exists\, (u_n)_n \subset D(A), v \in X_{-1} : u_n \to u, \quad Au_n \to v \quad \text{in } X_{-1} \text{ für } n \to \infty\}$$
$$\overline{A}u := v, \qquad u \in D(\overline{A}).$$

Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\overline{A}$ wohldefiniert und die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A in X_{-1} ist.

— please turn over —

b) Zeigen Sie $X = D(A_{-1})$ und $A_{-1} = \overline{A}$.
Hinweis: Zeigen Sie $D(\overline{A}) = X$ und dass X ein wesentlicher Definitionsbereich von A_{-1} ist.

c) Seien $u_0 \in X$ und $f \in C([0,T], X)$. Zeigen Sie, dass die für eine Funktion $u : [0,T] \to X$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) u ist milde Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

als Gleichung in X.

ii) u ist klassische Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) = A_{-1}u(t) + f(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

als Gleichung in X_{-1}.

Wir wünschen frohe Weihnachten
und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2017!