

Evolutionsgleichungen

11. Übungsblatt

Aufgabe 26 (Halbflüsse induziert durch Evolutionsgleichungen)

Sei X ein Banachraum und $-A$ der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ in X mit

$$\|T(t)\| \leq M e^{-at} \quad \text{für } t \geq 0,$$

wobei $a > 0$ und $M \geq 1$. Sei $u_0 \in X$ und $F : X \rightarrow X$ global Lipschitz. Zeigen Sie, dass die Lösung der Gleichung

$$(1) \quad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + F(u(t)), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

einen nichtlinearen Halbfluss induziert, das heißt $\psi(t, u_0) := u(t, u_0)$ definiert eine stetige Abbildung $\psi : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ mit

$$\psi(0, u_0) = u_0, \quad \psi(t_1 + t_2, u_0) = \psi(t_2, \psi(t_1, u_0))$$

für $t_1, t_2 \geq 0$ und $u_0 \in X$.

Aufgabe 27 (Hölder-Stetigkeit von C_0 -Halbgruppen)

Sei X ein Banachraum und $-A$ der Erzeuger einer C_0 -Halbgruppe $(T(t))_{t \geq 0}$ in X mit

$$\|T(t)\| \leq M e^{-at} \quad \text{für } t \geq 0,$$

wobei $a > 0$ und $M \geq 1$.

- a) Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert ein $c > 0$ mit

$$\|x - e^{\lambda t} T(t)x\| \leq c(1 + e^{\lambda t}) t^\alpha \|A^\alpha x\|, \quad \alpha \in [0, 1], \quad x \in D(A^\alpha), \quad t > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie zunächst Aufgabe 24 e). Die Identität

$$A^{\alpha-1} z = (I - \lambda A^{-1}) \int_0^t e^{\lambda s} T(s) A^\alpha x ds$$

für $z := x - e^{\lambda t} T(t)x$ hilft, um weiter abzuschätzen.

- b) Folgern Sie, dass für $\alpha \in (0, 1)$ und $x \in D(A^\alpha)$ die Abbildung $[0, \infty) \ni t \rightarrow T(t)x \in X$ α -Hölder-stetig ist.

Aufgabe 28 („Gauß’sche“ Halbgruppen)

Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine C_0 -Gruppe von Isometrien auf X mit Erzeuger A . Weiter definieren wir $S(0) := I$ und für $t > 0$

$$S(t)x := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2t}s^2} T(s)x ds, \quad x \in X.$$

Zeigen Sie, dass $(S(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe auf X ist und bestimmen Sie deren Erzeuger. Ist $(S(t))_{t \geq 0}$ eine analytische Halbgruppe?